III Zadanie programowania liniowego PL

$$\max\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

dim $\mathbf{x}$*=[n*1], dim* $\mathbf{c}$*=[n*1]*

Macierze $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ odpowiadają za współczynniki w m_1 *i* m_2 ograniczeniach

dim $\boldsymbol{A_1} = [m_1 * n]$, *dim* $\boldsymbol{A_2} = [m_2 * n]$

Wektory b_1, b_2 odpowiadają za prawe strony ograniczeń

dim $\boldsymbol{b_1} = [m_1 * 1]$, *dim* $\boldsymbol{b_2} = [m_2 * 1]$

Zadanie programowania liniowego dla ograniczeń mniejszościowych i większościowych

<u>Metoda dwóch faz</u>

I faza - należy znaleźć pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne poprzez rozwiązanie zadania pomocniczego

II faza - maksymalizacja funkcji celu x_0 dla następnego rozwiązania bazowego dopuszczalnego wg algorytmu simpleks.

Algorytm simpleks (prymalny) – I faza Krok 1 – nie ma możliwości stworzenia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego

<u>Krok 1.</u> **<u>(*start*).</u> Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Należy sprawdzić dopuszczalność rozwiązania: czy** $y_{i0} \ge 0\ dla\ i = 1,...,m$ **Tak - <u>idź do Kroku 2</u>, <u>Nie – STOP.</u>**

I faza metody PL – Nieznane pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne

I.1 - technika zadania pomocniczego

I.2 - technika pomocniczej funkcji celu

Ad.I.2 Pomocnicza funkcja celu
Uproszczona wersja I fazy metoda dwufazowej simpleks – uzyskanie bazowego rozwiązania dopuszczalnego

- Jeśli wektor b w początkowej tablicy simpleksowej ma przynajmniej jedną ujemną współrzędną, to tablica przedstawia niedopuszczalne rozwiązanie bazowe.
- Początkową niedopuszczalną tablicę simpleksową można przekształcić wykorzystując algorytm simpleks.
- Cel – uzyskanie nieujemnych wartości zmiennych pomocniczych.
- Należy znaleźć najmniejszą wartość $s \Rightarrow \min_i \{y_{i0},\ y_{i0} < 0\ dla\ i = 1,2,...,m\}$
- Wybrany wiersz s będzie stanowił pomocniczą funkcję celu , którą należy zmaksymalizować.
- Kolejne kroki metody simpleks powinny być prowadzone do uzyskania dopuszczalnej tablicy simpleks, tzn. takiej dla której spełniony jest warunek prymalnej dopuszczalności:

$$y_{i0} \ge 0\ dla\ i = 1,2,...,m$$

- Koniec I fazy

Ad.I.2 Pomocnicza funkcja celu
Uproszczona wersja I fazy metoda dwufazowej simpleks cd.

<u>Krok 1.</u> *<u>(start- wybór pomocniczej funkcji celu).</u>* Rozpoczynamy algorytm od znalezienia wiersza s , dla którego $y_{s0} < 0$ oraz $s = \min_i \{y_{i0} : y_{i0} < 0, i = 1,2,...,m\}$

Jeśli brak takiego *s* ($y_{i0} \ge 0\ dla\ i = 1,2,...,m$) to tablica odpowiada dopuszczalnemu rozwiązaniu bazowemu – należy przejść do II fazy.

<u>Krok 2</u>*<u>. (Wybór zmiennej wchodzącej do bazy).</u>* Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną $x_k \in R_N$ dla której $y_{sk} < 0$

Typową regułą jest wybór zmiennej $x_k,\ k \in R_N$, dla której:

$$y_{0k} = \min_{j \in R_N} \{y_{sk} : y_{sk} < 0\}$$

Jeśli jest brak takiej zmiennej x_k ($y_{sk} \ge 0\ dla\ k \in R_N$) to jest brak rozwiązania dopuszczalnego. Jest to problem sprzeczny.

Idż do **Kroku 3.**

<u>Krok 3</u><u>. (wybór zmiennej usuwanej z bazy).</u> Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną x_{Br} , dla której

$$\frac{y_{r0}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{y_{io}}{y_{ik}} : i = 1,...,m, \frac{y_{i0}}{y_{ik}} > 0 \right\}$$

Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich.

Taki przypadek zawsze istnieje, ponieważ $y_{s0} < 0\ i\ y_{sk} < 0$

Idż do **<u>Kroku 5</u>**.

<u>Krok 4.</u> <u>(eliminacja Gauss'a).</u> Wyznacz x_k oraz $x_{Bi}, i \ne R_N$, względem zmiennych $x_j, j \in R_N - \{k\}$ oraz zmiennej x_{B_r} zgodnie z wyprowadzonymi wzorami.

Podstaw $x_j = 0, j \in R_N - \{k\}$ i $x_{Br} = 0$

aby otrzymać pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

Idź do **<u>Kroku 1</u>**.

Przykład III zadania programowania liniowego metoda dwufazowa simpleks

$$\max_{x\in X} x_0 = 1x_1 + 6x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{rcrcl} +2x_1 & + & 1x_2 & \geq & 2 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 3, x \geq 0 \\ +1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 6 \end{array} \right\}$$

I faza

		$-x_1$	$-x_2$
x_0	0	-1	-6
x_3	-2	-2	-1
x_4	3	-1	1
x_5	6	1	1

Brak rozwiązania dopuszczalnego

II faza cz.1

		$-x_5$	$-x_2$
x_0	6	1	-5
x_3	10	2	1
x_4	9	1	2
x_1	6	1	1

I rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$x_{B_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0^{B_1} = 6$$

II faza cz.2

		$-x_5$	$-x_4$
x_0	28,5	3,5	2,5
X_3	5,5	1,5	-0,5
X_2	4,5	0,5	0,5
X_1	1,5	0,5	-0,5

II rozwiązanie bazowe dopuszczalne- rozwiązanie optymalne

$$x_{B_1} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}, \quad x_0^{B_2} = 28,5$$

Rozwiązanie optymalne: $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & \hat{x}^3 & \hat{x}^4 & \hat{x}^5 \end{bmatrix}^T == [1,5 \quad 4,5 \quad 5,5 \quad 0 \quad 0]^T$ $\quad \hat{x}_0 = 28,5$

Przypadki szczególne – zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem pustym - brak rozwiązania

$$X = \phi$$

W metodzie dwufazowej simpleks algorytm w I fazie obliczeń nie potrafi stworzyć pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego z powodu braku rozwiązań dopuszczalnych.

Przykład:

$$\max_{x\in X} x_0 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - x_2 - x_3$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3, x \geq 0 \\ x_2 - x_3 \leq 2 \end{array} \right\}$$

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	-1/2	1	1
x_4	2	-1/2	2	1
x_5	-3	1/2	-2	1
x_6	2	0	1	-1

		$-x_1$	$-x_4$	$-x_3$
x_0	x	x	x	x
x_2	x	x	x	x
x_5	-1	0	1	2
x_6	x	x	x	x

Nie jest spełniony warunek dopuszczalności drugiej tablicy simpleks i jednocześnie druga tablica wskazuje, że jest brak rozwiązań dopuszczalnych.

$$x_5 = -1 - x_4 - 2x_3$$

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

II Zadanie programowania liniowego PL

$$\min x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

dim $\mathbf{x}$*=[n*1], dim* $\mathbf{c}$*=[n*1]*

Macierz $\boldsymbol{A}$ odpowiada za współczynniki w m ograniczeniach

dim $\boldsymbol{A}$*=[m x n]*

Wektor wyrazów wolnych $\boldsymbol{b}$ odpowiada za prawą stronę ograniczeń

dim $\boldsymbol{b}$ *=[m*1]*

Postać kanoniczna II zadania PL

$$\begin{aligned} \min\ x_0 &= c^{\mathrm{T}} x, \\ \mathbf{A} x &\geq b, \\ x &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ -x_0 &= -c^{\mathrm{T}} x, \\ -\mathbf{A}\ x + I_s x_{\mathbf{s}} &= -b, \\ x\ , x_{\mathbf{s}} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Optymalne rozwiązanie II zadania PL metodą dualną simpleks

<u>Twierdzenie:</u>

Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań Ax=b jest rozwiązaniem optymalnym II zadania PL, jeśli są spełnione warunki:

(i) Warunek dualnej dopuszczalności:

$$y_{oj} \geq 0 \quad dla \quad j \in R_N$$

(ii) Warunek dualnej optymalności

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \quad i \in \{1, \ldots, m\}$$

Algorytm dualny simpleks

<u>Krok 1.</u> **<u>(*start*).</u> Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszej tablicy dualnie dopuszczalnej. Należy sprawdzić dualną dopuszczalność rozwiązania: czy** $y_{oj} \geq 0\ dla\ j \in R_N$ **Tak - idź do Kroku 2, Nie – koniec.**

<u>Krok 2.</u> **<u>(*test optymalności*).</u> Czy** $y_{i0} \geq 0$ **dla każdego** $i = 1, \ldots, m$ **?**

- **Tak - to aktualne rozwiązanie jest optymalne.**
- **Nie - idź do Kroku 3.**

<u>Krok 3.</u> **<u>(*Wybór zmiennej usuwanej z bazy*).</u> Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną** x_{B_r} **dla której** $y_{r0} < 0$.

Typową regułą jest wybór zmiennej x_{B_r} **dla której:**

$$y_{r0} = \min_{j \in R_N} \{y_{io}, \ y_{i0} < 0, \ i = 1, \ldots, m\}$$

Idż do Kroku 4.

Algorytm dualny simpleks c.d.

Krok 4. (wybór zmiennej wprowadzanej do bazy). Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną x_k dla której

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max\left(\frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} < 0\right).$$

Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich.

Idź do Kroku 5.

Krok 5. (eliminacja). **Dokonaj dualną iterację simpleksową metodą eliminacji Gauss'a poprzez wprowadzenie x_k do bazy oraz usunięcie x_{B_r}**

Idź do Kroku 2.

Przykład II zadania programowania liniowego – dualna metoda simpleks

$$\min_{x \in X} x_0 = 1\mathbf{x}_1 + 1x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{rcrcl} +1x_1 & + & 2x_2 & \geq & 8 \\ 2x_1 & + & 1x_2 & \geq & 6, x \geq 0 \\ +1x_1 & + & 1x_2 & \geq & 5 \end{array} \right\}$$

tablica początkowa

		$-x_1$	$-x_2$
$-x_0$	0	1	1
X_3	-8	-1	-2
X_4	-6	-2	-1
X_5	-5	-1	-1

tablica dualnie dopuszczalna

$y_{oj} \geq 0 \; dla \; j \in R_N$

tablica pośrednia

		$-x_1$	$-x_3$
$-x_0$	-4	½	½
X_2	4	½	-1/2
x_4	-2	-3/2	-1/2
X_5	-1	-1/2	-1/2

tablica jeszcze nie optymalna

$y_{20} < 0$

$y_{30} < 0$

tablica pośrednia

		$-x_4$	$-x_3$
$-X_0$	-14/3	1/3	1/3
X_2	10/3	1/3	-2/3
X_1	4/3	-2/3	1/3
X_5	-1/3	-1/3	-1/3

tablica jeszcze nie optymalna

$y_{30} < 0$

Przykład II zadania programowania liniowego–dualna metoda simpleks cd.

tablica optymalna I

		$-x_5$	$-x_3$
$-X_0$	-5	1	0
X_2	3	1	-1
X_1	2	-2	1
X_4	1	-3	1

tablica optymalna II

		$-x_5$	$-x_4$
$-x_0$	-5	1	0
X_2	4	-2	1
x_1	1	1	-1
X_3	1	-3	1

Rozwiązanie optymalne I wierzchołek: $\hat{x}^1 = [x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1] = [2, 3, 0, 1, 0]$

Rozwiązanie optymalne II wierzchołek: $\hat{x}^2 = [x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2] = [1, 4, 1, 0, 0]$

$\hat{x}_0 = 5$

Teoria dualności dla zadania programowania liniowego PL

$$\max \; x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \qquad \min \; v_0 = v^T b$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \qquad A^T v \geq c$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \qquad v \geq 0$$

Twierdzenie 7.1 :

Jeśli wektor *x* jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla zadania prymalnego i wektor v jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla zadania dualnego, to wartość funkcji celu w zadaniu dualnym nie może być mniejsza od wartości funkcji celu w zadaniu prymalnym.

$$v^T b \geq c^T x$$

Teoria dualności dla zadania PL cd.

Twierdzenie 7.2

Dla pary rozwiązań optymalnych $\hat{x} \; i \; \hat{v}$ zadania prymalnego i dualnego PL zachodzi warunek:

$$c^T \hat{x} = b^T \hat{v}$$

Twierdzenie 7.3

Niech (x_r ,x_s) i (v_r , v_s) będą odpowiednio rozwiązaniami dopuszczalnymi zadania prymalnego i dualnego, przy czym x_s i v_s są wektorami zmiennych dopełniających do postaci kanonicznej zadania w wektorach rozwiązań.

Wtedy $(\hat{x}_r, \hat{x}_s) \; i \; (\hat{v}_s, \hat{v}_r)$ będą odpowiednio rozwiązaniami optymalnymi pary zadań prymalnego i dualnego, jeśli zachodzi warunek komplementarności zmiennych:

$$\hat{x}^T \hat{v} = 0 \qquad \text{tzn.} \qquad \hat{x}_r^T \hat{v}_s + \hat{x}_s^T \hat{v}_r = 0$$

Twierdzenie 7.4

Jeśli jedno z pary wzajemnie dualnych zadań programowania liniowego ma rozwiązanie optymalne, to ma je również zadanie dualne i obydwa zadania mają identyczne wartości funkcji celu.

Twierdzenie 7.5

Jeśli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Przykład I zadanie prymalne

$$\min_{v\in V} v_0 = 5v_1 + 0v_2 + 21v_3$$

$$V = \left\{ x : \begin{array}{c} v_1 - v_2 + 6v_3 \geq 2 \\ v_1 + v_2 + 2v_3 \geq 1 \\ v_1, v_2, v_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

zadanie dualne

$$\max_{x\in X} x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \end{array} , x \geq 0 \right\}$$

Postać wektora rozwiązań:

$$v = [v_r, v_s] = [v_1, v_2, v_3 / v_4, v_5] \qquad x = [x_r, x_s] = [x_1, x_2 / x_3, x_4, x_5]$$

$$x^T v = 0 \Rightarrow \quad [x_r, x_s]^T [v_s, v_r] = 0$$

Przykład II System cięcia dłużyc

$$\min v_0 = 0.3v_1 + 0.6v_2 + 0.2v_3$$

$$7v_1 + 3\ v_2 + 0v_3 \geq 2100$$

$$0v_1 + 1v_2 + 2v_3 \geq 1200$$

$$v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

$$\max_{x\in X} x_0 = 2100\mathbf{x}_1 + 1200x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{c} 7x_1 + 0x_2 \leq 0.3 \\ 3x_1 + 1x_2 \leq 0.6 \\ 0x_1 + 2x_2 \leq 0.2 \end{array} , x \geq 0 \right\}$$

Teoria dualności dla zadania PL cd.

I. Rozwiązanie zadania dualnego - metodą simpleks

Zadanie dualne:

$$\max_{x\in X} x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2 \qquad X = \left\{ x : \begin{array}{c} 1x_1 + 1x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \end{array} , x \geq 0 \right\}$$

		x_1	x_2
x_0	0	-2	-1
x_3	5	1	1
x_4	0	-1	1
x_5	21	6	2

		x_5	x_2
x_0	7	1/3	-1/3
x_3	3/2	-1/6	2/3
x_4	7/2	1/6	4/3
x_1	7/2	1/6	1/3

		x_5	x_3
x_0	31/4	1/4	1/2
x_2	9/4	-1/4	3/2
x_4	1/2	1/2	-2
x_1	11/4	1/4	-1/2

Rozwiązanie optymalne:

a) Zadanie dualne $\hat{x} = [x_1, x_2, \uparrow x_3, x_4, x_5]$ $\hat{x} = \left[\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, \uparrow 0, \frac{1}{2}, 0\right]$

b) Zadanie prymalne $\hat{v} = [v_4, v_5, \uparrow v_1, v_2, v_3]$ $\hat{v} = \left[0, 0, \uparrow \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right]$

Wartość optymalna funkcji celu: $\hat{x}_0 = \hat{v}_0 = \frac{31}{4}$