Programowanie liniowe - podsumowanie

- Każde bazowe rozwiązanie dopuszczalne jest punktem wierzchołkowym zbioru X.
- Istnieje punkt wierzchołkowy zbioru X w którym funkcja celu zadania PL przyjmuje maksimum
- Każdemu punktowi wierzchołkowemu zbioru X odpowiada m wektorów liniowo niezależnych z danego zbioru n wektorów związanych z tym punktem.

Twierdzenie 6.1

Niech będzie dany układ równań liniowych

$$Ax=B$$

gdzie jest macierzą mxn, dim x=m, (A)=m, n>m. Jeśli istnieje rozwiązanie dopuszczalne układu równań tzn. takie, że *x>=0* to istnieje również bazowe rozwiązanie dopuszczalne tzn. $x=[x_B,0]$

Twierdzenie 6.2

Rozwiązanie dopuszczalne x zadania programowania liniowego jest punktem wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych X_{OL} wtedy i tylko wtedy gdy odpowiada mu bazowe rozwiązanie dopuszczalne tzn. $x=[x_B,0]$

Rozwiązania optymalne

Twierdzenie 6.3

Jeśli zadanie programowania liniowego PL posiada rozwiązanie optymalne i wszystkie rozwiązania bazowe są niezdegenerowane to za pomocą algorytmu simpleks uzyskuje się rozwiązanie optymalne po co najwyżej

$$\binom{n}{m}$$

iteracjach.

Przypadki szczególne cd.

II. Zadanie programowania liniowego – zadanie nieograniczone

Twierdzenie 6.4

Jeśli zadanie PL jest nieograniczone, to istnieją rozwiązania bazowe dopuszczalne x_B oraz wektor y_K taki, że:

$$y_{0k} < 0 \; i \; y_{ik} \le 0 \; dla \; i = 1,\ldots,m$$

Wówczas zbiór rozwiązań jest pusty.

Przykład: $\min x_0 = -x_1 - x_2,$

$$-x_1 - x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Przypadki szczególne cd.
III. Zadanie programowania liniowego – posiadające nieskończoną ilość rozwiązań optymalnych na zbiorze ograniczonym

- Ten przypadek wystąpi wtedy, gdy można znaleźć tablicę simpleksową, której odpowiada optymalne rozwiązanie bazowe, takie że:

  $$y_{i0} \ge 0 \; dla \; i = 1,\ldots,m \; oraz \; y_{0j} \ge 0 \; dla \; j = 1,\ldots,n$$

  i istnieje para

  dla której: $(i_0, j_0), i_0 \in \{1,\ldots,m\}, j_0 \in \{1,\ldots,n\}$

  $$y_{0j_0} = 0, \; y_{i_0 0} > 0 \; i \; y_{i_0 j_0} > 0$$

- Dla przestrzeni o wymiarze *n* rozwiązanie optymalne jest kombinacją wypukłą wierzchołków x^i należących do zbioru optymalnego.

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{\hat{p}} \lambda_i \hat{x}^i \quad gdy \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in [0,1], \; i = 1,\ldots,p$$

!! **Dla rozwiązania zdegenerowanego, przypadek ten może zaistnieć również pod innymi warunkami.**

Przypadki szczególne cd.
III. Przykład gdy jest wiele rozwiązań optymalnych na zbiorze ograniczonym

$$\max_{x \in X} x_0 = 4\mathbf{x}_1 + 2x_2 \qquad X = \left\{ x : \begin{matrix} -x_1 & + & x_2 & \le & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & \le & 6 \end{matrix}, x \ge 0 \right\}$$

		x_1	x_2
x_0	0	-4	-2
x_3	4	-1	1
x_4	6	2	1

		x_4	x_2
x_0	12	2	0
x_3	7	0.5	1.5
x_1	3	0.5	0.5

		x_4	x_3
x_0	12	2	0
x_2	4.66	0.33	0.66
x_1	0.66	0.33	-0,33

- 1 rozwiązanie bazowe optymalne w: R^2 $\quad \hat{x}^1 = [3,0]^T$
- 2 rozwiązanie bazowe optymalne w: R^2 $\quad \hat{x}^2 = [\frac{2}{3}, \frac{14}{3}]^T$

Zadanie posiada dwa dopuszczalne bazowe rozwiązania optymalne. Odpowiadają one dwóm wierzchołkom w zbiorze rozwiązań optymalnych.

Zbiór rozwiązań optymalnych

$$\hat{X} = \{x : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda \in [0,1]\} = \left\{ x : x = (3\lambda + \frac{2}{3}(1-\lambda)), (0 + \frac{14}{3}(1-\lambda)), \lambda \in [0,1] \right\}$$

$$= \left\{ x : x = (\frac{2}{3} + \frac{7}{3}\lambda), (\frac{14}{3} - \frac{14}{3}\lambda) \right\}.$$

Przypadki szczególne cd.
IV. Zadanie programowania liniowego – posiadające nieskończoną ilość rozwiązań optymalnych na zbiorze nieograniczonym

Ten przypadek wystąpi wtedy, gdy można znaleźć tablicę simpleksową, której odpowiada optymalne rozwiązanie bazowe, takie że:

$$y_{i0} \geq 0 \; dla i = 1,\ldots,m \; oraz \; y_{0j} \geq 0 \; dla \; j = 1,\ldots,n$$

dla której, że istnieje j_0 takie, że $y_{0j_0} = 0$ i dla wszystkich „*i*" zachodzi *y_{i0}=0* (degeneracja) bądź

$$y_{0j_0} \leq 0$$

IV. Zadanie programowania liniowego – posiadające nieskończoną ilość rozwiązań optymalnych na zbiorze nieograniczonym cd

- Rozwiązanie optymalne zadania PL przyjmuje postać parametryczną:
  - Dla n=2 równanie parametryczne prostej,
  - Dla n=3 równanie parametryczne płaszczyzny itd.

Przykład:

$$\max_{x \in X} x_0 = -2\mathbf{x}_1 + 4x_2 \qquad X = \left\{ x : \begin{array}{ccccc} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \end{array}, x \geq 0 \right\}$$

		x_1	x_2
x_0	0	2	-4
x_3	1	-2	1
x_4	4	-1	2

		x_4	x_3
x_0	4	-6	4
x_2	1	-2	1
x_4	2	3	-2

		x_4	x_3
x_0	8	2	0
x_2	2.33	0.66	-0,33
x_1	0.66	0.33	-0,66

Bazowe rozwiązanie optymalne: $\hat{x} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{3}]^T$

Zbiór rozwiązań optymalnych jest półprostą: $\hat{X} = \left\{ x \in R^2 : x = \hat{x} + [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]^T t, \quad t \geq 0 \right\}$

V. Zadanie programowania liniowego – zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem pustym - brak rozwiązania

$$X = \phi$$

W tej wersji metody prymalnej simpleks algorytm nie potrafi stworzyć pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego z powodu wektora b, który posiada składowe ujemne.

Przykład:

$$\max_{x \in X} x_0 = \mathbf{x}_1 + 4x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \end{array}, x \geq 0 \right\}$$

		x_1	x_2
x_0	0	-1	-4
x_3	4	1	1
x_4	-2	1	-1

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nie jest spełniony warunek dopuszczalności pierwszej tablicy simpleks

Krok 1. (start). **Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Należy sprawdzić dopuszczalność**

rozwiązania:

$$y_{i0} \geq 0 \; dla \; i = 1,\ldots,m$$