METODY OPTYMALIZACJI

Zadanie programowania liniowego część II

Wykład V

Extremum zadania programowania liniowego PL

Definicja 4.5

Punkt x należący do wypukłego zbioru $X \subset R^n$ jest punktem wierzchołkowym zbioru X, jeśli nie może być wyrażony jako kombinacja liniowa innych punktów zbioru X.

Twierdzenie 4.1

Zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego PL jest zbiorem wypukłym.

Twierdzenie 4.2

Rozwiązanie dopuszczalne x zadania programowania liniowego PL jest punktem wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych X wtedy i tylko wtedy gdy odpowiada mu bazowe rozwiązanie dopuszczalne tzn.:

$$\boxed{x = [x_B, 0]^T}$$

Dowód: 1. Zakłada się, że wektor x jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym. Pokazać, że x jest punktem wierzchołkowym zbioru X

2. Zakłada się, że wektor x jest punktem wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego. Pokazać, że wektor x jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym.

Extremum zadania programowania liniowego PL cd.

Twierdzenie 4.3

Jeżeli funkcja $f : X \to R^1$, określona na domkniętym i ograniczonym wypukłym zbiorze $X \subset R^n$, jest ciągła i wklęsła, to globalne minimum funkcji *f(x)* występuje w punkcie ekstremalnym (bądź punktach) zbioru ***X***.

Dowód: Zaprzeczamy tezie: $f(\hat{x}) < f(v)$

$\hat{x}$ - dowolne globalne minimum

v – dowolny punkt ekstremalny zbioru ***X.***

*Zbiór **X*** jest zbiorem zwartym, funkcja f(x) jest ciągła – więc istnieje punkt $\hat{x}$

$v^i, i = 1,\dots,k$ - punkty ekstremalne zbioru ***X*** .

Każdy punkt $x \in X$, który nie jest punktem ekstremalnym, może być wyrażony jako kombinacja wypukła punktów v^i

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v^i, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,k; \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$$

Funkcja *f(x)* jest wypukła więc zachodzi dla dowolnego punktu $\hat{x} \in X$ zachodzi:

$$f(\hat{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i v^i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(v^i) \geq \max_i \ f(v^i)$$

ckd.

Extremum zadania programowania liniowego PL cd.

Twierdzenie 4.4

1. Funkcja celu zadania PL przyjmuje wartość maksymalną w punkcie wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania PL.
2. Jeśli funkcja celu zadania PL przyjmuje wartość maksymalną w więcej niż jednym punkcie wierzchołkowym, to ma tą samą wartość dla każdej kombinacji wypukłej tych punktów.

Dla p dopuszczalnych bazowych rozwiązań optymalnych, tzn. $\hat{x}^1, \hat{x}^2 \dots\dots \hat{x}^p$

Zbiór rozwiązań optymalnych przyjmuje postać:

$$\boxed{\hat{X} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \hat{x}^i, \ \lambda_i \geq 0, i = 1,\dots,p \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1}$$

Wprowadzone oznaczenia:

$$y_0 \equiv \begin{bmatrix} c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad y_j \equiv \begin{bmatrix} c_B B^{-1} a_j - c_j \\ B^{-1} a_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_j, j \in R_N$ oznaczają kolumny macierzy N.

Funkcja celu x_0

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

M funkcji ograniczeń

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_N} y_{ij} x_j, \quad dla\ i = 1,\dots,m$$

Postać początkowej tablicy simpleksowej

		$-x_N$
x_0	$c_B B^{-1} b$	$c_B B^{-1} N - c_N$
x_B	$B^{-1} b$	$B^{-1} N$

$\xrightarrow{c_B = 0}$

		$-x_N$
x_0	0	$-c_N$
x_B	b	N

dla przypadku gdy $c_B = 0$ tzn. pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne odpowiada za punkt wierzchołkowy *x*

$$x = [0,\dots,0].$$

Polepszanie rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_N} y_{0j} x_j$$

$$zawsze\, x_j \geq 0,$$

$$zatem\ gdy\ x_k \uparrow to\ również\ x_0 \uparrow\ gdy\ y_{0k} \leq 0$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_N} y_{ij} x_j, \quad dla\ i = 1,\ldots,m$$

Polepszanie bazowego rozwiązania dopuszczalnego – metoda eliminacji Gauss'a.

$$\theta_{rk} = \min_{i=1,\ldots,m} (y_{i0} / y_{ik}, y_{ik} > 0).$$

$$x_k = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R_N - \{k\}} \frac{y_{rj}}{y_{rk}} x_j - \frac{1}{y_{rk}} x_{Br}$$

$$x_{B_i} = \left(y_{i0} - \frac{y_{ik} y_{r0}}{y_{rk}} \right) - \sum_{j \in R_N - \{k\}} \left(y_{ij} - \frac{y_{ik} y_{rj}}{y_{rk}} \right) x_j + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} x_{Br}$$

Gdy mamy nie-zdegenerowane rozwiązanie bazowe dopuszczalne takie, że

$$y_{0j} < 0\ dla\ pewnego\, j = k, k \in R_N\ oraz \quad y_{ik} > 0$$

dla przynajmniej jednego *i* wówczas można z niego otrzymać lepsze bazowe rozwiązanie dopuszczalne przez wymianę jednej z kolumn macierzy *B* na kolumnę macierzy *N*.

Polepszona tablica simpleks odpowiada za następne rozwiązanie bazowe dopuszczalne o większej wartości funkcji celu.

			$-x_j$		$-x_{Br}$	
		…		…		..
x_0	$y_{00}-(y_{0k}y_{r0}/y_{rk})$	…	$y_{0j}-(y_{0k}y_{rj}/y_{rk})$	…	$-y_{0k}/y_{rk}$	
		…		…		..
x_{Bi}	$y_{i0}-(y_{ik}y_{r0}/y_{rk})$	…	$y_{ij}-(y_{ik}y_{rj}/y_{rk})$		$-y_{ik}/y_{rk}$	
		…		…		..
x_k	y_{r0}/y_{rk}	…	y_{rj}/y_{rk}	…	$1/y_{rk}$	..

Optymalne rozwiązanie zadania programowania liniowego PL metodą simpleks

Twierdzenie 4.5

Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań *Ax=b*

jest rozwiązaniem optymalnym zadania PL, jeśli są spełnione dwa warunki:

(i) Warunek prymalnej dopuszczalności:

$$y_{io} \geq 0 \quad dla \quad i \in \{1,\ldots,m\}$$

(ii) Warunek optymalności

$$y_{0j} \geq 0 \quad dla \quad \forall j \in R_N$$

Algorytm simpleks dla ograniczeń mniejszościowych

***Krok 1.* (*start*).** **Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Należy sprawdzić dopuszczalność rozwiązania: czy** $y_{i0} \geq 0\ dla\ i = 1,\ldots,m$ **Tak - idź do kroku 2, Nie – STOP.**

***Krok 2.* (*test optymalności*). Czy** $y_{0j} \geq 0$ **dla każdego** $j \in R_N$ **?**

- **Tak - to aktualne rozwiązanie jest optymalne.**
- **Nie - idź do kroku 3.**

***Krok 3.* (*Wybór zmiennej wchodzącej do bazy*). Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną** $x_k, k \in R_N$ **dla której** $y_{0k} < 0$.

Typową regułą jest wybór zmiennej x_k **jest reguła dla której:**

$$y_{0k} = \min_{j \in R_N} \{ y_{0j}, y_{0j} \leq 0 \}$$

Idż do kroku 4.

Algorytm simpleks (prymalny) c.d.

Krok 4. (wybór zmiennej usuwanej z bazy). Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną x_{Br}, **dla której**

$$\theta_{rk} = \min_{i=1,\ldots,m} (y_{i0} / y_{ik}, y_{ik} > 0).$$

Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich.

Idż do kroku 5.

Krok 5. (eliminacja Gauss'a). Wyznacz x_k **oraz** $x_{Bi}, i \neq R_N$, **względem zmiennych** $x_j, j \in R_N - \{k\}$ **oraz zmiennej** x_{B_r} **zgodnie z wyprowadzonym wzorem.**

Podstaw $x_j = 0, j \in R_N - \{k\}\ \mathrm{i}\ x_{Br} = 0$

aby otrzymać nowe rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

Idź do kroku 2.

Krok ten czasami nazywa się wymianą zmiennej bazowej (piwotyzacją).

Schemat reguły przeliczenia współczynników w tablicy simpleks wg metody eliminacji Gauss'a

- p - element centralny (główny)
- q – dowolny element w wierszu centralnym (głównym)
- r – dowolny element w kolumnie centralnej (głównej)
- s – dowolny pozostały element

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} & q \\ r & s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\mathbf{p}} & \dfrac{q}{\mathbf{p}} \\ \dfrac{-\mathbf{r}}{\mathbf{p}} & s-\dfrac{rq}{\mathbf{p}} \end{bmatrix}$$

Zadanie programowania liniowego PL dla ograniczeń mniejszościowych

Założenia:

1. Zbiór X rozwiązań dopuszczalnych $X \neq 0$

2. algorytm simpleks startuje z bazowego dopuszczalnego rozwiązania oraz w trakcie jego realizacji nie występuje degeneracja

I. Zadanie programowania liniowego PL posiada jedno rozwiązanie

$$\max_{x\in X} \; x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2 \qquad X = \left\{ x: \begin{array}{c} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{array}, x \ge 0 \right\}$$

Przykład:

		x_1	x_2
x_0	0	-2	-1
x_3	5	1	1
x_4	0	-1	1
x_5	21	6	2

		x_5	x_2
x_0	7	1/3	-1/3
x_3	3/2	-1/6	2/3
x_4	7/2	1/6	4/3
x_1	7/2	1/6	1/3

		x_5	x_3
x_0	31/4	1/4	1/2
x_2	9/4	-1/4	3/2
x_4	1/2	1/2	-2
x_1	11/4	1/4	-1/2

Rozwiązanie bazowe optymalne: $\hat{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4 .x_5]^T = [\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0]^T$

Wartość optymalna funkcji celu: $x_0 = \frac{31}{4}$