METODY OPTYMALIZACJI

Zadanie programowania liniowego część I

Wykład IV

Zadanie programowania liniowego PL dla ograniczeń mniejszościowych

$$\max_{x\in X} f(\mathbf{x})=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}\ge 0$$

dim $\mathbf{x}$=n, dim $\mathbf{c}$=n, dim $\mathbf{A}$ =[m x n], dim $\mathbf{b_1}$=m_1,

Postać kanoniczna zadania PL

$$\max_{x\in X} x_0=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$X=\{x: Ax=b, x\ge 0\}$$

Równoważność zadań programowania matematycznego

I Ograniczenie równościowe można zastąpić dwoma ograniczeniami nierów-ściowymi

$$g_i(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} g_i(x)\le 0 \\ g_i(x)\ge 0 \Rightarrow -g_i(x) \end{cases}$$

II Ograniczenie nierównościowe można zastąpić ograniczeniem równościowym , wprowadzając *zmienną uzupełniającą*

$$g_i(x)\pm x_{n+j}=0$$

$$x_{n+j}\ge 0$$

III *Zmienną wolną* można przedstawić jako różnicę dwóch zmiennych nieujemnych

$$x_i\in R$$

$$x_i=x_i^+-x_i^-$$

gdzie: $x_i^+\ge 0,\ x_i^-\ge 0$

Przykład zadania programowania liniowego

$$\max_{x\in X} x_0=2\mathbf{x}_1+1x_2 \qquad X=\left\{x: \begin{matrix} x_1+x_2\le 5 \\ -x_1+x_2\le 0 \\ 6x_1+2x_2\le 21 \end{matrix}, x\ge 0\right\}$$

•Liczba zmiennych n=2,

•Liczba ograniczeń m=3.

Postać kanoniczna zadania PL – wprowadzenie zmiennych uzupełniających dla układu m równań liniowych.

$$\max_{x\in X} x_0=2\mathbf{x}_1+1x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$X=\left\{x: \begin{matrix} x_1+ & x_2+ & x_3+ & 0+ & 0 & = & 5 \\ -x_1+ & x_2+ & 0+ & x_4+ & 0 & = & 0 \\ 6x_1+ & 2x_2+ & 0+ & 0+ & x_5 & = & 21 \end{matrix}\right\}$$

Kolumny odpowiadające jednostkowej macierzy bazowej ***B***

Postać kanoniczna macierzowa zadania PL

$$\max_{x\in X} x_0=2\mathbf{x}_1+1x_2 \qquad X=\left\{x: \begin{matrix} x_1+x_2\le 5 \\ -x_1+x_2\le 0 \\ 6x_1+2x_2\le 21 \end{matrix}, x\ge 0\right\}$$

•Liczba zmiennych n=5,

•Liczba ograniczeń m=3.

$$\max_{x\in X} x_0=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad x^T=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]^T \qquad c^T=[c_1,c_2,c_3,c_4,c_5]^T=[2,1,0,0,0]$$

$$X=\{x: Ax=b, x\ge 0\}$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array} \qquad b=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\ge 0$$

Kolumny odpowiadające jednostkowej macierzy bazowej ***B – x₃, x₄, x₅***

Podstawowe definicje

Jeśli dla układu równań liniowych Ax=b spełniony jest warunek rz[A_r]=rz[A] to mogą zaistnieć trzy następujące przypadki:

1. **rz[A] = m = n istnieje jedno rozwiązanie układu Ax=b.**
2. **rz[A] = n < m istnieje jedno rozwiązanie układu równań, lecz przy tym (m - n) równań jest zbędnych.**
3. **rz[A] = m < n istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu Ax=b , jest to układ nieoznaczony.**

Definicja 4.1 macierzy bazowej B

Macierzą bazową B układu równań Ax = b rz[A] = m, n>m nazywamy nieosobliwą macierz kwadratową o wymiarach (m*m) utworzoną z liniowo-niezależnych kolumn a^j macierzy A.

Definicja 4.2 rozwiązania bazowego

Rozwiązaniem bazowym układu równań Ax=b rz[A]=m, n>m nazywamy wektor

$x_b=B^{-1}b$ utworzony ze zmiennych odpowiadających kolumnom a^j macierzy bazowej B.

Składowe wektora bazowego x_b są to zmienne bazowe.

Rozwiązania bazowe

$A=[B,N]$ B- macierz bazowa nieosobliwa; N- macierz niebazowa $\qquad \det B \neq 0, \dim B = m$

$x=[x_B, x_N]$

x_B - wektor zmiennych bazowych odpowiadających kolumnom macierz *B*

x_N - wektor zmiennych niebazowych odpowiadających kolumnom macierz N

Definicja 4.3

Rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym zadania programowania liniowego PL

jeśli wektor x_B jest nieujemny tzn. $\quad x_B \geq 0$

Wówczas rozwiązanie bazowe dopuszczalne posiada nie więcej niż m dodatnich x_i.

$$x=[x_B,0] \quad x_B = B^{-1}b \quad x_N = 0$$

Definicja 4.4

Niezdegenerowanym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym zadania PL nazywamy rozwiązanie dopuszczalne , w którym nie wszystkie składowe x_i

są większe od zera.

Pierwsze rozwiązanie bazowe

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N$$

$$x_0 = c_B\,B^{-1}b - (c_B\,B^{-1}N - c_N)\,x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B\,B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$

Poszukiwanie rozwiązań bazowych dopuszczalnych

Pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N$$

$$x_0 = c_B\,B^{-1}b - (c_B\,B^{-1}N - c_N)\,x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B\,B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$

Wprowadzone oznaczenia:

$$y_0 \equiv \begin{bmatrix} c_B\,B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad y_j \equiv \begin{bmatrix} c_B\,B^{-1}a_j - c_j \\ B^{-1}a_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_j,\ j \in R_N$ oznaczają kolumny macierzy N.

Funkcja celu x_0

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j\in R} y_{0j}\,x_j$$

M funkcji ograniczeń

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j\in R_N} y_{ij}\,x_j, \quad dla\ i = 1,\ldots,m$$

Postać początkowej tablicy simpleksowej

		$-x_N$
x_0	$c_B B^{-1}b$	$c_B B^{-1}N - c_N$
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$

$\xrightarrow{}$ $c_B = 0$

		$-x_N$
x_0	0	$-c_N$
x_B	b	N

dla przypadku gdy c_B=*0* tzn. pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne odpowiada za punkt wierzchołkowy *x* w postaci:

$$x_N = [0,\ldots,0].$$

Zadanie programowania liniowego PL dla ograniczeń mniejszościowych

Założenia:

1. Zbiór X rozwiązań dopuszczalnych $X \neq 0$

2. algorytm simpleks startuje z bazowego dopuszczalnego rozwiązania oraz w trakcie jego realizacji nie występuje degeneracja

I. Zadanie programowania liniowego PL posiada jedno rozwiązanie

$$\max_{x \in X} x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2 \qquad X = \left\{ x : \begin{array}{c} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{array}, x \ge 0 \right\}$$

Początkowa tablica simpleksowa

		x_1	x_2
x_0	0	-2	-1
x_3	5	1	1
x_4	0	-1	1
x_5	21	6	2

Rozwiązanie bazowe początkowe: $\hat{x} = [x_B, x_N]$

Wartość początkowa funkcji celu: $\hat{x} = [x_3, x_4, x_5, x_1 . x_2]^T = [5, 0, 21, 0, 0]^T$

$x_0 = 2 * x_1 + x_2 \qquad tzn.\ x_0 = 0.$

Polepszanie rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_N} y_{0j} x_j$$

$$zawsze\ x_j \ge 0,$$

$$zatem\ gdy\ x_k \uparrow to\ również\ x_0 \uparrow gdy\ y_{0k} \le 0$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_N} y_{ij} x_j, \quad dla\ i = 1, \ldots, m$$

Pierwsza tablica simpleks-I rozwiązanie bazowe dopuszczalne

		$\dots$	$-x_j$	$\dots$	$-x_k$	$\dots$
x_0	y_{00}	$\dots$	y_{0j}	$\dots$	y_{0k}	$\dots$
		$\dots$		$\dots$		$\dots$
x_{Bi}	y_{iO}	$\dots$	y_{ij}	$\dots$	y_{ik}	$\dots$
		$\dots$		$\dots$		$\dots$
x_{Br}	y_{r0}	$\dots$	y_{rj}	$\dots$	y_{rk}	$\dots$
		$\dots$		$\dots$		$\dots$
x_{Bm}	y_{m0}	$\dots$	y_{mj}	$\dots$	y_{mk}	$\dots$