

METODY OPTIMALIZACJI

Wydział Elektroniki
Studia II stopnia – studia magisterskie

Wykład III
Własności funkcji

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcić

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Właściwe minimum lokalne:

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie \hat{x} właściwe minimum lokalne, jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że: $\forall x \in E$

$$f(\hat{x}) < f(x)$$

przy czym: $E = X \cap \Delta$

$$\Delta = \{x : 0 < \|x - \hat{x}\| < \delta\}$$

Słabe minimum lokalne

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie \hat{x} słabe minimum lokalne, jeżeli istnieje $\delta_i > 0$ takie, że $\forall x \in E_i$

$$f(\hat{x}) \leq f(x_i)$$

przy czym:

$$E_i = X \cap \Delta_i$$

$$\Delta_i = \{x : 0 < \|x - \hat{x}\| < \delta_i\}$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcić

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Każde minimum globalne jest minimum lokalnym, lecz nie na odwrót.

- Zadanie optymalizacji bez ograniczeń dla $X = R^n$

$$\min_{x \in X} f(x) = f(\hat{x})$$

- Zadanie optymalizacji z ograniczeniami:

$$\min_{x \in X} f(x) = f(\hat{x})$$

- ❖ Zadanie programowania liniowego ZPL
- ❖ Zadanie programowania nieliniowego ZPN

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcić

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Twierdzenie Weierstrass'a

Funkcja $f(x)$ ciągła na zwartym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych [zbiorze ograniczonym i domkniętym]

jest na tym zbiorze ograniczona i osiąga swe kresy tzn.: istnieją punkty $x_1, x_2 \in X$

takie, że dla każdego $x \in X$ zachodzi:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcić

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Własności funkcji wypukłych

Definicja zbioru wypukłego:

Zbiór $X \subset R^n$ nazywamy wypukłym, jeżeli dla każdego dwóch punktów $x^1, x^2 \in X$ odcinek łączący te dwa punkty także należy do X tzn.:

$$X = \{x : x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Zbiór wypukły – intuicyjnie, podzbiór pewnej przestrzeni euklidesowej, o tej własności, że dowolny odcinek, którego końce należą do tego zbioru, w całości się w nim zawiera.

Definicja funkcji wypukłej:

Niech $X \subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcję $f: X \rightarrow R^1$ będziemy nazywali wypukłą, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $x^1, x^2 \in X$ i dla każdego: $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcić

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Kiedy funkcja $f(x)$ jest wypukła

Macierz A o wymiarze $n \times n$ nazywamy hesjanem, gdy jej elementami są drugie pochodne cząstkowe funkcji $f(x)$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Lemat 1

Niech $f: X \rightarrow R^1$ ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe oraz niech $X \subset R^n$

będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f(x)$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej hesjan

$A(x)$ jest dodatnio pół-określony dla każdego $x \in X$.

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcić

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Definicja macierzy A dodatnio półokreślonej

Macierz A o wymiarze $n \times n$ jest dodatnio pół-określona, jeśli

$$\text{dla każdego } x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, Ax \rangle \geq 0$$

Definicja macierzy A dodatnio określonej

Macierz A o wymiarze $n \times n$ jest dodatnio określona, jeśli

$$\text{dla każdego niezerowego } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, Ax \rangle > 0$$

Kryterium Sylwestra – praktyczne sprawdzenie wypukłości funkcji $f(x)$

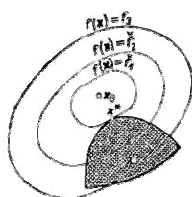
► Kwadratowa macierz symetryczna A jest dodatnio pół-określona wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_{11} \geq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

► Kwadratowa macierz symetryczna A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy:

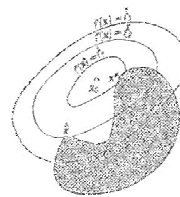
$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Rys.1 Zbiór X - wypukły



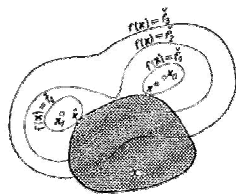
Funkcja $f(x)$ też jest wypukła

Rys.2 Zbiór X – nie jest wypukły



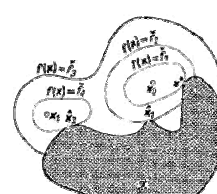
Funkcja $f(x)$ – funkcja wypukła.

Rys.3 Zbiór X – jest wypukły



Funkcja $f(x)$ nie jest wypukła,

Rys.4 Zbiór X – nie jest wypukły



Funkcja $f(x)$ też nie jest wypukła.

Funkcje wypukłe

Lemat 2

Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją różniczkowalną oraz zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym.

Funkcja $f(x)$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x, x^0 \in X$

$$f(x) \geq f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle$$

Funkcja $f(x)$ jest **wypukła** w przedziale (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji leży ponad wykresem stycznej dla każdego punktu x^0 z przedziału (a,b) .

Lemat 3

Niech funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, dla $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie funkcją wypukłą, wówczas dla dowolnego rzeczywistego α zbiór

$$X_\alpha = \{x: f(x) \leq \alpha\}$$

jest wypukły.

Lemat 4

Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Jeśli funkcje $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ dla $i=1, \dots, k$ są funkcjami wypukłymi oraz jeśli wielkości skalarne są większe od zera dla $i=1, \dots, k$ $\alpha_i \geq 0$ to funkcja $f(x)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x)$$

jest funkcją wypukłą.

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Twierdzenie 2

Dowolne minimum lokalne funkcji wypukłej $f(x)$ na wypukłym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych $X \subset \mathbb{R}^n$ jest na tym zbiorze jej minimum globalnym.

Dowód:

Niech w punkcie $x^1 \in X$ funkcja $f(x)$ ma swoje minimum lokalne. Oznacza to, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że:

$$f(x^1) = \min_{x \in V} f(x)$$

gdzie: $V = \{x \in X, \|x - x^1\| \leq \varepsilon\}$

Przyjmijmy $x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$. Wybierzmy $0 < \lambda < 1$ oraz

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in V$$

Ze względu na wypukłość $f(x)$:

$$\lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \geq f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

$$f(x^2) \geq \frac{f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) - \lambda f(x^1)}{1-\lambda} \geq \frac{f(x^1) - \lambda f(x^1)}{1-\lambda} = f(x^1)$$

ckd

Twierdzenie 3

Ścisłe wypukła funkcja $f(x)$ określona na wypukłym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych X ma na tym zbiorze co najwyżej jedno minimum.

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.

Przykład

Niech $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^1$. Wykazać, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ określona

formułą liniową:

$$f(x) = c^T x + d$$

jest jednocześnie wypukła i wklęsła na \mathbb{R}^n .

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie.