METODY OPTYMALIZACJI

Wydział Elektroniki
Studia II stopnia – studia magisterskie

Wykład II
Przykłady zastosowań

Formułowanie zadania optymalizacji

- Określenie procesu technologicznego, zjawiska fizycznego czy systemu ekonomicznego
- Modelowanie procesu – opis matematyczny sformułowany w postaci przeznaczonej do optymalizacji:
  - x – wektor zmiennych decyzyjnych
  - n- liczba zmiennych decyzyjnych
  - f(x) – funkcja celu (kryterium jakości)
  - X – przestrzeń rozwiązań
  - X – zbiór rozwiązań dopuszczalnych
  - $\hat{x}$ – optymalny wektor zmiennych decyzyjnych

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

$$f(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1$$

$$\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

Zadania programowania liniowego

Przykład I– zadanie programowania liniowego

Znajdź wektor x=[x_1,x_2], który maksymalizuje liniową funkcję celu

$$x_0 = 2x_1 + 3x_2$$

przy ograniczeniach

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2$$

$$\begin{array}{lll} 2x_1 & +2x_2 & \le 14 \\ x_1 & +2x_2 & \le 8 \\ 4x_1 & & \le 16 \end{array}$$

n=2, m=3

Przykład II– zadanie maksymalizacji zysku w procesie produkcji

$$\max_{x\in X_D} x_0 = 9x_1 + 8x_2$$

$$X_D = \left\{ x \middle| \begin{array}{lll} 8x_1 & +5x_2 & \le 40 \\ 2x_1 & +5x_2 & \le 25, x \ge 0 \\ x_1 \ge 0, & x_2 \ge 0 & \end{array} \right\}$$

Zadania programowania liniowego

Przykład III– zadanie optymalnego rozkroju

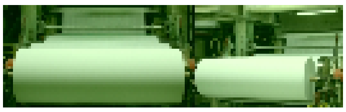
Znajdź wektor x=[x_1,x_2], który minimalizuje liniową funkcję celu

$$\min_{x\in X} x_0 = 0.3x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3$$

przy ograniczeniach

$$X = \left\{ x : \begin{array}{c} 7x_1 + 3x_2 + 0x_3 \ge 2100 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 \ge 1200 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array} \right.$$

Przykład IV
Maksymalizacja zysków w procesie produkcji w fabryce papieru.



Cel: Optymalny poziom produkcji papieru niskiej i wysokiej jakości przy uwzględnieniu ograniczeń.

Zakład przemysłowy produkuje papier niskiej i wysokiej jakości. Do produkcji wykorzystywane są następujące składniki:

- pulpa drzewna
- chemikalia
- szmaty lniane
- woda

Ceny surowców kształtują się następująco:

Surowiec	Cena jednost. [zł/jedn.]
Pulpa	3
Chemikalia	4
Szmaty lniane	9

Woda jest wolna od opłat.

Jej zużycie jest nielimitowane.

W zależności od tego, czy produkowany jest papier niskiej, czy wysokiej jakości zużywana jest różna ilość surowców.

Surowiec/jednostkę	Jakość papieru	
	Niska	Wysoka
Pulpa	1,10	1,50
Chemikalia	0,10	0,20
Szmaty	0,10	0,40

Koszt wyprodukowania jednostki papieru:

- niskiej jakości wynosi - 1,8 [zł],
- wysokiej jakości - 1,5 [zł].

Cena sprzedaży jednostki produktu końcowego wynosi :

- 10,0 [zł] dla produktu niskiej jakości
- 16,5 [zł] dla produktu wysokiej jakości.

Efektem ubocznym przy produkcji papieru są ścieki. Podczas wytwarzania jednostki papieru niskiej jakości powstają 3 jednostki ścieków, zaś w przypadku papieru o wysokiej jakości powstaje 6 jednostek ścieków.

Część ścieków poddawana jest procesowi oczyszczania w wyniku czego ilość zanieczyszczenia jest redukowana o 50%. Pozostała część ścieków jest odprowadzana do kanałów. Koszt tych operacji przedstawia się następująco:

- Oczyszczanie ścieków powstałych przy produkcji papieru niskiej jakości = 0,11 [zł] na jednostkę produkcyjną,
- oczyszczanie ścieków powstałych przy produkcji papieru wysokiej jakości =0,12 [zł] na jednostkę produkcyjną,
- Koszt odprowadzenia jednostki ścieków do kanałów = 0,3 [zł].

Proces produkcyjny obarczony jest z góry nałożonymi ograniczeniami:

- Zakład może zakupić maksymalnie 50 jednostek pulpy drzewnej
- Maksymalna przepustowość oczyszczalni ścieków wynosi 60 jednostek
- Ze względu na kooperację zakład musi wytworzyć przynajmniej 12 jednostek papieru niskiej jakości

Cel: znalezienie optymalnego poziomu produkcji papieru niskiej i wysokiej jakości, takiego aby zysk przedsiębiorstwa był maksymalny.
Uwzględnić należy wszystkie koszty generowane przez proces produkcyjny oraz ograniczenia tegoż procesu.

W celu znalezienia maksymalnego dochodu , należy zmaksymalizować funkcję celu przedstawiającą dochód zakładu produkcji papieru.

Definicja problemu programowania liniowego PL

- Wektor zmiennych decyzyjnych: $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

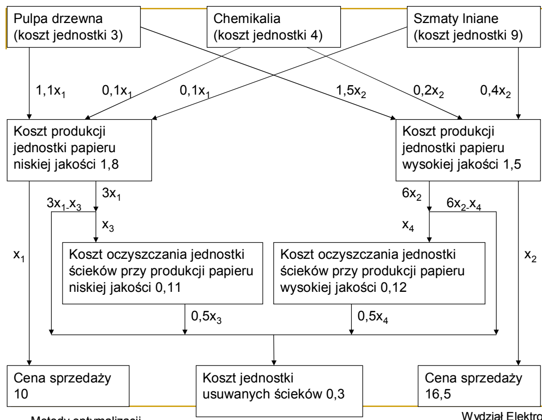
gdzie:

x_1 - wielkość produkcji papieru niskiej jakości

x_2 -wielkość produkcji papieru wysokiej jakości

x_3 -ilość oczyszczanych ścieków przy produkcji papieru niskiej jakości

x_4 - ilość oczyszczanych ścieków przy produkcji papieru wysokiej jakości.



Wyznaczenie funkcji celu i ograniczeń zadania produkcji papieru

$10x_1 + 16{,}5x_2$	dochód
$1{,}8x_1 + 1{,}5x_2$	koszty produkcji
$3 \cdot 1{,}1x_1 + 4 \cdot 0{,}1x_1 + 9 \cdot 0{,}1x_1$	koszty materiałów do produkcji papieru niskiej jakości
$3 \cdot 1{,}5x_2 + 4 \cdot 0{,}2x_2 + 9 \cdot 0{,}4x_2$	koszty materiałów do produkcji papieru wysokiej jakości
$0{,}11x_3 + 0{,}12x_4$	koszty oczyszczania ścieków
$0{,}3[(3x_1 - x_3) + 0{,}5x_3 + (6x_2 - x_4) + 0{,}5x_4]$	koszt odprowadzenia ścieków

W celu znalezienia maksymalnego zysku, należy maksymalizować funkcję celu w postaci: dochód – koszty.

$$
\begin{aligned}
\max_X F(X) &= 10x_1 + 16{,}5x_2 - (1{,}8x_1 + 1{,}5x_2) - (3 \cdot 1{,}1x_1 + 4 \cdot 0{,}1x_1 + 9 \cdot 0{,}1x) + \\
&- (3 \cdot 1{,}5x_2 + 4 \cdot 0{,}2x_2 + 9 \cdot 0{,}4x) - (0{,}11x_3 + 0{,}12x_4) + \\
&- (0{,}3[(3x_1 - x_3) + 0{,}5x_3 + (6x_2 - x_4) + 0{,}5x_4]) = \\
&= 2{,}7x_1 + 4{,}4x_2 + 0{,}04x_3 + 0{,}03x_4
\end{aligned}
$$

Zatem funkcja celu jest postaci:

$$\max_{x \in X} F(x) = 2{,}7x_1 + 4{,}4x_2 + 0{,}04x_3 + 0{,}03x_4$$

Uwzględniając następujące ograniczenia X:

- maksymalna ilość pulpy $1{,}1x_1 + 1{,}5x_2 \le 50$
- maksymalna przepustowość oczyszczalni ścieków $x_3 + x_4 \le 60$
- wymaganie nieujemnego przepływu $3x_1 - x_3 \le 0$
- wymaganie nieujemnego przepływu $6x_2 - x_4 \le 0$
- wymaganie wyprodukowania określonej liczby papieru niskiej jakości $x_1 \ge 12$
- Wymaganie produkowania określonej liczby papieru wysokiej jakości: $x_2 \ge 0$

Zadanie maksymalizacji zysku produkcji papieru

$$\max_{x \in X} \; x_0 = 2.7\mathbf{x}_1 + 1.5x_2 + 0.04\mathbf{x}_3 + 0.03x_4$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1.1x_1 + 1.5x_2 \le 50 \\ x_1 + x_2 \le 60 \\ 3x_1 - x_3 \ge 0, \quad x \ge 0 \\ 6x_2 - x_4 \ge 0 \\ x_1 \ge 12 \end{array} \right\}$$

Przykład V: Znaleźć najlepszą liniową aproksymację nieznanej funkcji określonej poprzez tabelę 20 pomiarów.

Wyznaczyć optymalne wartości wektora współczynników $b=[b_1, b_2, b_3, b_4]$ formy liniowej :

$$y = b^T u$$

gdzie: u - wektor wielkości sterujących, y - wektor wielkości wyjściowych

Dane: tabela z 20 pomiarami wektora u wielkości sterujących oraz wektora wielkości wyjściowych

dla następujących kryteriów jakości:

1. minimum sumy wartości bezwzględnych różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:

$$\min \; [f(b) = \sum_{i=1}^{20} |\tilde{y}_i - y_i(b)|$$

gdzie: $\tilde{y}_i \; i = 1,...,20$ **- wartości zmierzone wielkości wyjściowych**

$y_i(b)$ **i=1,...,20 - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu**

$$y_i(b) = b_1 u_{1i} + b_2 u_{2i} + b_3 u_{3i} + b_4 u_{4i}$$

Zadanie trudne do rozwiązania, ponieważ funkcja celu jest nie-różniczkowalna.

Równoważne zadanie programowania liniowego

Wprowadzono nową zmienną: $z_i = |\tilde{y}_i - y_i(b)|$

- **Zwiększenie wymiaru zadania: 24 zmienne niezależne**

$$\min \; f(b) = \sum_{i=1}^{20} z_i$$

przy ograniczeniach:

$$-z_i \le \tilde{y}_i - b_1 u_{1i} - b_2 u_{2i} - b_3 u_{3i} - b_4 u_{4i} \le z_i$$

dla i=1,...,20

Zadanie programowania liniowego:

- **funkcja celu jest wypukła**
- **rozwiązano metodą dwufazową simpleks.**

Wektor b optymalnych współczynników :

$b_1 = 51{,}87 \quad b_2 = 1{,}232 \quad b_3 = -0{,}122 \quad b_4 = -1{,}08$

Drugie kryterium jakości:

2. minimum sumy kwadratów różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:

$$\min \; [f(b) = \sum_{i=1}^{20} (\tilde{y}_i - y_i(b))^2$$

gdzie: $\tilde{y}_i \; i = 1,...,20$ **- wartości zmierzone wielkości wyjściowych**

$y_i(b)$ **- i=1,...,20 - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu**

$$y_i(b) = b_1 u_{1i} + b_2 u_{2i} + b_3 u_{3i} + b_4 u_{4i}$$

Zadanie programowania nieliniowego:

- **funkcja celu jest wypukła**
- **rozwiązano metodą gradientów sprzężonych w wersji Polak'a-Ribiere'y.**

$b_1 = 39{,}28 \quad b_2 = 1{,}07 \quad b_3 = 0{,}16 \quad b_4 = -0{,}94$

Wyniki identyfikacji zależą od wyboru kryterium optymalizacji i przyjętej dokładności obliczeń.

Przykład zadania programowania nieliniowego
Przykład VI. Zadania sterowania siecią dystrybucji wody minimalizujące zużycie energii elektrycznej

Dana jest sieć dystrybucji wody w postaci:

- **m- węzłów,**
- **s - odbiorców z odpowiednimi potrzebami, w których utrzymywane jest odpowiednie ciśnienie oraz n łuków,** $\sigma \in R^s$
- **każdy łuk „i" charakteryzuje się przepływem y_i:** $y \in R^n$

Opis sieci:

- **spadek ciśnienia x_i na łuku „i":** $x \in R^n \quad x_i = r_i y_i^2 \operatorname{sgn} y_i + d_i$
  gdzie: r_i- opór hydrauliczny łuku „i"
  d_i- różnica wysokości geodezyjnych łuku „i"

Ograniczenia wynikające ze struktury sieci: $A\,y = \sigma$

I prawo Kirchhoff'a:

A – macierz incydencji dla węzłów sieci wodociągowej,

II prawo Kirchhoff'a:

$$B\,x = 0$$

B – macierz oczkowa dla węzłów sieci wodociągowej.

Sterowanie siecią dystrybucji wody, minimalizujące zużycie energii elektrycznej

$$\min \quad f(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i)$$

gdzie: $f_i(y_i) = x_i\, y_i = r_i y_i^3 \operatorname{sgn} y_i + d_i y_i$

przy ograniczeniach:

$$A\,y = \sigma$$

$$B\,x = 0$$

$x_i = r_i y_i^2 \operatorname{sgn} y_i + d_i$ dla $i = 1,...,n$

$y \in R^n \quad x \in R^n \quad \sigma \in R^s$

Przykład VII – zadanie optymalizacji topologii sieci telekomunikacyjnej

- Siec telekomunikacyjna została zamodelowana jako graf *G=(V,E,C)* , gdzie: V – zbiór *n* węzłów i E- zbiór *m* łuków oznaczających *m* łączy
- C_t –zbiór wybranych przepustowości kanałów
- Dana jest geograficzna lokalizacja węzłów w postaci macierzy odległości
- $C_{ij} = C(i,j)$ przepustowość łącza *(i,j)*
- f_{ij} - przepływ w łączu *(i,j)*
- x_{ij} - zmienna binarna

Jeżeli kanał *(i,j)* zostanie wybrany wówczas $x_{ij} = 1$, *w przeciwnym przypadku* $x_{ij} = 0$

Wektor *x, określający topologie sieci* :

$$x = \{x_{ij} : x_{ij} \in \{0,1\}; \quad i, j \in \{1,\dots,n\}\}$$

Model matematyczny

$c_{ij} = c(i,j)$ - koszt dzierżawy łącza (i,j)

E_x - zbiór wybranych kanałów

C_x - zbiór wybranych przepustowości dla łączy

$$c_{ij} = c_{ij}(C_{ij}, l_{ij})$$

$$i, j \in \{1,2,\dots,n\} \qquad n-1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$$

$G_x=(V,E_x,C_x)$ – graf składający się ze zbioru węzłów V i zbioru wybranych łączy

$$E_x = \{(i,j) : x_{ij} = 1 \; and \; C_{ij} \neq 0, \; for \; i,j \in \{1,\dots,n\}\}$$

Zadanie projektowania topologii sieci telekomunikacyjnej

Zdefiniowanie kryteriów jakości w systemie

1. Koszt utworzenia i eksploatacji sieci telekomunikacyjnej :

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(C_{ij}, l_{ij})x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

2. Średnie opóźnienie pakietów w sieci, opisanej topologią połączeń *x*

$$T(x) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} T(x_{ij}) \to \min \qquad (2)$$

gdzie:

- Opóźnienie w całej sieci $T(x) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{m_{\max}} \frac{f_{ij}}{C_{ij} - f_{ij}} x_{ij}$

- średnia liczba pakietów [pakiet/s] w sieci $\gamma = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} \gamma_{jk}$

Ograniczenia

- Topologia sieci zupełnej – jako sieć początkowa
- Aktualny przepływ f_{ij} wzdłuż łącza *(i,j)* nie może przekroczyć przepustowości tego łącza C_{ij},

  $f_{ij} < C_{ij}$
- Niezawodność sieci jest realizowana poprzez parametr spójności sieci – tzw. k-spójność, $k \ge 2$ dla sieci o strukturze mesh np. dla sieci typu WAN lub MAN.
- Jeżeli przepływ f_{ij} wzdłuż łącza *(i,j)* zbliża się do jej przepustowości C_{ij} wówczas opóźnienie przesyłu pakietów T_{ij} zdąża do nieskończoności.

$$T(x_{ij}) = \frac{f_{ij}}{C_{ij} - f_{ij}} x_{ij}$$