

METODY OPTYMALIZACJI

Wydział Elektroniki
Studia II stopnia - magisterskie

dr inż. Ewa Szlachcic
Katedra Automatyki, Mechatroniki i Sterowania
Politechnika Wroclawska
pok. 219 C-3
ewa.szlachcic.staff.iiar.pwr.wroc.pl

Program wykładu: wprowadzenie, zasady zaliczenia

- **Programowanie nieliniowe.** Podstawy teoretyczne PN. Warunki konieczne i wystarczające optymalności. Metody dokładne i heurystyczne (m.in.. genetyczne i ewolucyjne, poszukiwanie harmonii) poszukiwania ekstremum bez ograniczeń i z ograniczeniami.

- **Programowanie liniowe.** Podstawy teoretyczne PL. Warunki konieczne i dostateczne optymalizacji liniowej. Metody typu simpleks, dualny simpleks. Inne algorytmy liniowe.

w tym:

Programowanie całkowitoliczbowe liniowe
Metody odcięć. Metody podziału i ograniczeń. Klasyczne zadania optymalizacji dyskretnej (problem plecakowy, przydziału, komiwojażera, problemy szeregowania zadań.), przepływy w sieciach i zadania transportowe.

- **Programowanie wielokryterialne**

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie

Sformułowanie zadania optymalizacji

Wektor zmiennych decyzyjnych \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

gdzie: n – ilość zmiennych decyzyjnych.

Funkcja celu (funkcja kryterialna) $f(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1$$

oraz m funkcji ograniczeń $g_i(\mathbf{x})$:

$$g_i(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1 \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych \mathbf{x} , należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych X w postaci:

$$X = \left\{ \mathbf{x}: \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i=1, \dots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = 0 & i=1, \dots, p \end{cases} \right\}$$

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in X$

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie

Kategorie klasyfikacji zadań optymalizacji

- Model procesu:
 - Stacjonarny
 - Dynamiczny
 - Model procesu bez ograniczeń
 - Model procesu z ograniczeniami
- Przestrzeń rozwiązań zmiennych decyzyjnych
 - Zmienne rzeczywiste
 - Zmienne całkowitoliczbowe
 - Zmienne binarne
- Postać funkcji celu:
 - Funkcja skalarna
 - Funkcja wektorowa
- Dane o procesie niezbędne w algorytmie optymalizacji
 - Wartości funkcji celu
 - Gradient funkcji – algorytm pierwszego rzędu
 - Hessian funkcji – algorytm drugiego rzędu

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie

Formułowanie i rozwiązywanie zadań optymalizacji

- Wybór modelu opisowego, a w konsekwencji struktury matematycznej modelu jest w znacznym stopniu arbitralny,
- Struktura matematyczna użyta do modelowania powinna być skończona wymiarowa – tzn.: wyczerpująco opisana za pomocą skończonej liczby parametrów,
- Kryteria oceny modelu są ściśle związane z jego przeznaczeniem.

Wniosek:

Model uznany za adekwatny w jednym zastosowaniu może się okazać nieadekwatny w innym.

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
Studia magisterskie

Przykłady praktycznych zastosowań:

- Optymalne projektowanie procesów technologicznych, sieci elektrycznych, sieci rezystorów, aparatury elektronicznej
- Identyfikacja procesów technologicznych
- Optymalizacja sieci telekomunikacyjnej, sieci bezprzewodowej, sieci radiowej, sieci światłowodowej
- Optymalizacja sieci szkieletowej – technologia sieci neuronowych
- Optymalizacja wykorzystania zasobów w planowaniu sieci telekomunikacyjnej
- Optymalne zarządzanie przedsiębiorstwem - minimalizacja kosztów, maksymalizacja zysków w przedsiębiorstwie
- Projektowanie efektywnej struktury systemu (np. sieci komputerowej)
- Projektowanie optymalnego przepływu w sieciach (rozległe sieci komputerowe, sieci dystrybucji wody, sieci dystrybucji gazu)
- Zadania optymalnego przydziału, zadania dystrybucji produktów
- Zadania optymalnego rozmieszczenia (minimalizacja strat czy odpadów- optymalny rozkrój , optymalne cięcie, optymalny kształt)
- Zadania optymalizacji tras pojazdów - Vehicle Routing Problem (VRP - VRPTW, CVRP, CVRPTW)

Zadanie programowania liniowego PL

$$\max f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$A_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \quad m_1 \text{ ograniczeń}$$

$$A_2 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2 \quad m_2 \text{ ograniczeń}$$

$$A_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \quad m_3 \text{ ograniczeń}$$

$$\dim \mathbf{x} = n, \dim \mathbf{c} = n$$

Macierze A_1, A_2, A_3 odpowiadają za współczynniki w m_1, m_2, m_3 ograniczeniach

$$\dim A_1 = [m_1 \times n], \dim A_2 = [m_2 \times n], A_3 = [m_3 \times n]$$

Wektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ odpowiadają za prawe strony ograniczeń

$$\dim \mathbf{b}_1 = m_1, \dim \mathbf{b}_2 = m_2, \dim \mathbf{b}_3 = m_3$$

Rodzaje zadań optymalizacji ze względu na wartości zmiennych decyzyjnych

- Zadania ze zmiennymi ciągłymi – przestrzeń poszukiwań jest iloczynem kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych, n – wymiar przestrzeni zmiennych niez.
 - Wypukłe – funkcja celu i zbiór rozwiązań dopuszczalnych są wypukłe
 - Niewypukłe – funkcja celu i zbiór rozwiązań dopuszczalnych mogą być niewypukłe
- Zadania ze zmiennymi dyskretnymi – wartości zmiennych niezależnych należą do zbioru dyskretnego (zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb binarnych)
- Zadania ze zmiennymi mieszanymi - wartości zmiennych niezależnych należą zarówno do zbioru liczb rzeczywistych i do zbioru liczb w postaci dyskretnej

$$X = R^n$$

$$X = Z^n$$

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

Polega na znalezieniu optymalnego rozwiązania, które jest akceptowalne z punktu widzenia każdego kryterium

- Z problemem optymalizacji wielokryterialnej mamy do czynienia wówczas, gdy mamy do czynienia jednocześnie z wieloma funkcjami celu
- Możliwe rozwiązania zadania optymalizacji można podzielić na dwie grupy:
 - rozwiązania zdominowane
 - rozwiązania nie-zdominowane (optymalne w sensie Pareto).

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]$$

$$\text{przy ograniczeniach } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\mathbf{x} \in X = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

gdzie: k – liczba funkcji celu $f_i(\mathbf{x}), i=1, \dots, k$

Literatura

- Stadnicki J., Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji z przykładami zastosowań technicznych, WNT, Warszawa, 2006.
- Kusiak J., Danielewska-Tulecka A., Oprocha P., Optymalizacja Wybrane metody z przykładami zastosowań, PWN, Warszawa, 2009.
- Cegielski A. Programowanie matematyczne, Wyd. Uniw. Zielonog. 2004
- Stachurski A., Wierzbicki A.P., Podstawy optymalizacji, PWN Warszawa 1999
- Findeisen S., Szymanowski W., Wierzbicki A., Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, 1987
- Michalewicz Z., Algorytmy genetyczne+struktury danych= programy ewolucyjne, WNT Warszawa, 1999
- Arabas J., Wykłady z algorytmów ewolucyjnych, WNT Warszawa, 2001
- Wierzbicki S.T., Sztuczne systemy immunologiczne, Teoria i zastosowania, EXIT Warszawa, 2002.