Nieliniowe zadanie optymalizacji bez ograniczeń – numeryczne metody iteracyjne optymalizacji

$$\min_{\mathbf{x}\in R^n} f(\mathbf{x}) = f\left(\hat{\mathbf{x}}\right)$$

Algorytmy poszukiwania minimum lokalnego dla:

- zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń
- zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami

Algorytmy zbieżne do minimum lokalnego x*, jeżeli taki punkt istnieje.

I. Techniki optymalizacji lokalnej

Ad.I Iteracyjne algorytmy optymalizacji

- **Algorytmy optymalizacji w kierunku**
- **Algorytmy optymalizacji bez ograniczeń**
- **Algorytmy optymalizacji z ograniczeniami**

Algorytmy zbieżne do minimum lokalnego x*, jeżeli taki punkt istnieje.

Algorytm optymalizacji lokalnej - przemierzanie obszaru rozwiązań dopuszczalnych w poszukiwaniu ekstremum funkcji celu według iteracyjnego schematu.

Zbieżność ciągu punktów

Definicja. Mówimy, że ciąg punktów $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ **jest zbieżny do punktu** $\hat{x}$ **jeżeli ciąg różnic k-tych przybliżeń i punktu optymalnego (punktu minimum)** $h^k = x^k - \hat{x}$ **zbiega do zera, co w przestrzeni** R^n **oznacza, że**

$$\left\|h^k\right\| \to 0$$

Kryteria zbieżności:

1. Test teoretyczny

$$\left|f(x^k) - f(\hat{x})\right| \le \varepsilon_1, \left\|x^k - \hat{x}\right\| \le \varepsilon_2$$

2. Przybliżona stacjonarność rozwiązania

$$\nabla f(x^k) = g^k \quad \Rightarrow \left\|g^k\right\| \le \varepsilon$$

3. Testy praktyczne:

$$\left\|x_i^k - x_i^{k+1}\right\| \le \varepsilon_i, \quad \forall i = 1,..., n$$

lub

$$\left|f(x^k) - f(x^{k+1})\right| \le \varepsilon_1$$

Schemat algorytmu optymalizacji lokalnej bez ograniczeń

(1) Wybierz punkt startowy $\mathbf{x_o} = \mathbf{x_k}$.
(2) Oblicz wartość funkcji $f(x^k)$ oraz jeżeli jest to wymagane to jej gradient $\nabla f(x^k)$

(3) Zbadaj przyjęte kryterium zbieżności.
- Jeśli kryterium jest spełnione to koniec algorytmu – uzyskano rozwiązanie optymalne x^k i optymalną wartość funkcji celu $f(x^k)$
- Jeżeli nie, to przejdź do (4)

(4) Wyznacz ustalony kierunek poszukiwań : d^k

(5) Wykonaj minimalizację kierunkową wybraną metodą:

$$x^{k+1} \in T(x^k, d^k)$$

(6) Podstaw $x^k \Leftarrow x^{k+1} \quad oraz \quad k \Leftarrow k+1$

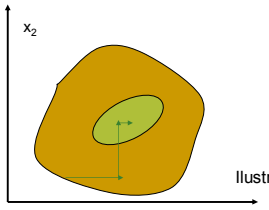
i przejdź do (2)

Algorytmy optymalizacji lokalnej

- **Algorytmy bezgradientowe**
  - **Algorytm Hooke'a-Jeeves'a**
  - **Algorytm Nelder'-Meade'a**
  - **Algorytm Gauss'a-Seidla**
  - **Algorytm Powella**
- **Algorytmy gradientowe**
  - **Algorytm największego spadku**
  - **Zmodyfikowany algorytm Newtona**
  - **Algorytm Zangwilla**
  - **Algorytm Fletchera-Reeves'a**
  - **Algorytm Polaka-Ribiery**
  - **Algorytm Fletchera-Powella-Davidona**
  - **Algorytm Wolf'a-Broydena-Davidona**

Metody podstawowe kierunków poprawy

1. Metoda Gaussa-Seidla (bezgradientowa).
2. Metoda największego spadku (gradientowa).
3. Metoda Newtona (gradient i hesjan).



Ilustracja metody Gaussa-Seidla

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{e}_{i(k)}$$

Metoda Gaussa-Seidla (bardzo wolna zbieżność liniowa)

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$

Metoda największego spadku (zbieżność liniowa)

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{H}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)^{-1}\nabla f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$

$$\mathbf{H} = \left\{h_{ij}\right\} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}}$$

Metoda Newtona (zbieżna kwadratowo ale kosztowna i nie zawsze stabilna)

Najefektywniejsze są tzw. metody quasi-newtonowskie, w których w kolejnych iteracjach konstruuje się przybliżenie odwrotności hesjanu.

Do minimalizacji w kierunku można użyć kilku algorytmów takich jak np.:

Algorytmy bez-gradientowe:
- złotego podziału,
- aproksymacji kwadratowej,

Algorytmy gradientowe:
- ekspansji i kontrakcji geometrycznej z testem jednoskośnym,
- logarytmiczny złoty podział odcinka ze wstępną ekspansją i kontrakcją geometryczną,
- aproksymacji parabolicznej z testem jednoskośnym,
- bisekcji z testem dwuskośnym Goldstein'a,

Iteracja metody poszukiwania minimum w kierunku

Przebieg typowej k-tej iteracji dowolnej metody realizującej ideę poszukiwania wzdłuż kierunku:

1. Określ kierunek poszukiwań d^k.

2. Znajdź α **minimalizujące** $\tilde{f}(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k)$ **ze względu na** α.

3. Podstaw $x^{k+1} = x^k + \alpha\, d^k$.

Algorytm Gauss'a-Seidela

Istotą metody jest minimalizacja funkcji f(x) wzdłuż kolejnych kierunków ortogonalnej bazy , która utworzona jest z wersorów układu współrzędnych kartezjańskich.

Algorytm Gaussa-Seidela polega na cyklicznym stosowaniu odwzorowania T do kolejnych kierunków ortogonalnej bazy.

Wykonanie jednego takiego cyklu nazywa się k-tą iteracją.

Odwzorowanie T:

$$T(x, d^i) = \left\{x_i^{k+1} : f(x_i^{k+1} = \min_{\tau\in\sigma} f(x_i^k + \tau_i d^i),\quad x_i^{k+1} = x_i^k + \tau_i d^i\right\}$$

Algorytm obliczeń – metoda Gauss'a-Seidla

(1) Wybierz punkt startowy $\mathbf{x^o = x^k}$. Oblicz wartość funkcji $\boldsymbol{f(x^k)}$

(2) Zbadaj kryterium zbieżności:

$$\left\|x_i^k - x_i^{k+1}\right\| \le \varepsilon_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n \qquad \text{oraz} \qquad \left|f^k - f^{k+1}\right| \le \varepsilon_1$$

$$gdzie \quad \varepsilon \in [0, \delta] \quad np.: \varepsilon = 10^{-6}$$

Jeśli tak, to koniec, jeśli nie, to przejdź do (3)

(3) Wyznacz kierunek poszukiwań : są to kolejne kierunki ortogonalnej bazy

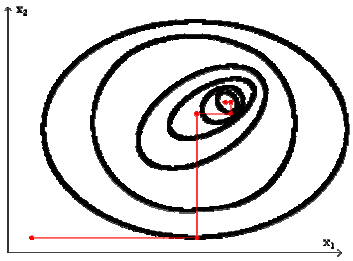
$$d^k = e^k \qquad \text{Np.} \qquad e^1 = [1,0,\ldots,0]$$

(4) Wykonaj minimalizację kierunkową wybraną metodą:

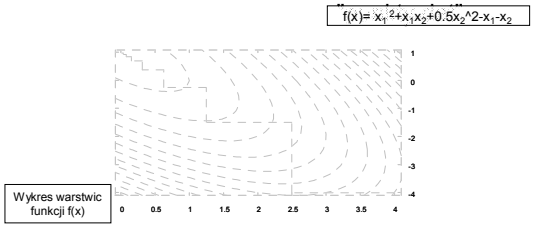
$$x^{k+1} \in T(x^k, d^k)$$

(5) Podstaw $x^k \Leftarrow x^{k+1}$ *oraz* $k \Leftarrow k+1$ *i powtórz* (1)

Przebieg algorytmu optymalizacji lokalnej Gauss'a-Seidla



Metoda Gauss'a-Seidel'a



Metoda Powella

- Ta metoda jest stosowana dla funkcji, których poziomice mają kształt wąskich dolin.
  Można dzięki niej uzyskać znaczną poprawę szybkości zbieżności w stosunku do metody Gaussa-Seidela.
- Modyfikacja kierunku poszukiwań następuje tu w wyniku wprowadzania do bazy ortogonalnej kierunków sprzężonych do już istniejących.
  Stosuje się dwa warianty metody Powella.
- W pierwszym do istniejącej bazy wprowadza się kierunki sprzężone co obieg (czyli po minimalizacji wzdłuż n kierunków obowiązującej bazy), zaś w drugim wariancie następuje to po spełnieniu określonego warunku.
- Ponieważ kierunki wzajemnie sprzężone są liniowo niezależne, w obu wariantach metody Powella zachowany pozostaje warunek jednoznaczności przekształcenia bazy kierunków poszukiwań. Dzięki temu mamy pewność, iż nie nastąpi redukcja wymiarowości bazy, co prowadziłoby do niezbieżności metody.

Wariant pierwszy metody Powella

1) Dla *j = 1 ..n* obliczamy λ_j minimalizujące $f(x_j)$ oraz współrzędne nowego punktu
   $x_j = x_{j-1} + \lambda_j S_j$
2) Wyznaczamy składowe kierunku sprzężonego zgodnie ze wzorem :
$$S_{n+1} = \frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|}$$
3) Określamy λ minimalizujące $f(x_{n+1})$ wzdłuż nowego kierunku S_{n+1} oraz wyznaczamy współrzędne nowego punktu startowego
$$x_{n+1} = x_n + \lambda S_{n+1}$$
1) Dokonujemy modyfikacji kierunków poszukiwań zgodnie z zasadą $S_r = S_{r+1}$ dla *r = 1 .. n*

Czynności od kroku 1) do 4) powtarzamy aż spełnione zostanie kryterium na minimum.

Ze względu na to, iż w pewnych przypadkach procedura nie charakteryzuje się zbieżnością II rzędu, należy przed jej rozpoczęciem dokonać minimalizacji funkcji wzdłuż wszystkich kierunków ortogonalnej bazy początkowej.

Kryterium stopu

W celu ustalenia warunków zakończenia działania procedury iteracyjnej Powell zastosował następujący algorytm:

1)Wykonywanie standardowej procedury aż do momentu, gdy w kolejnej iteracji przesunięcie punktu wzdłuż poszczególnych kierunków poszukiwań będzie mniejsze niż 0,1 wymaganej dokładności obliczeń *eps*. Znaleziony punkt oznaczony jest jako P_a.

2)Obliczenie nowego punktu startowego przez pomnożenie współrzędnych punktu P_a przez 10*eps*.

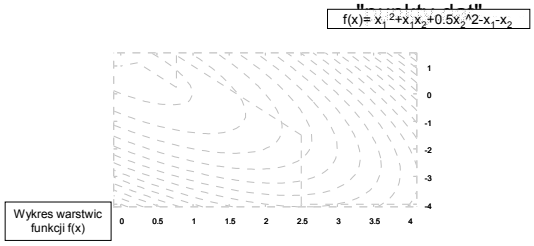
3)Powtórzenie czynności z punktu 1). Znaleziony punkt oznaczony jest jako P_b.

4)Znalezienie minimum funkcji wzdłuż linii przechodzącej przez oba wyznaczone punkty (P_a i P_b). Znaleziony punkt oznaczony jest jako P_c.

5)Zakończenie działania procedury jeżeli $|P_a - P_c|$ oraz $|P_b - P_c|$ są mniejsze od 0,1*eps*.

6)W przeciwnym przypadku wyznaczenie nowego kierunku poszukiwań S_k zgodnie ze wzorem
$$S_k = \frac{P_d - P_e}{|P_d - P_e|}$$
i włączenie go do bazy na miejsce S_1, a następnie ponowne przejście do punktu 1).

Metoda Powella



Wykres warstwic funkcji f(x)

Algorytm Nelder'a- Meade'a – metoda sympleksu NM dla zadań bez ograniczeń
Algorytm Compleks dla zadań z ograniczeniami

- Utworzyć simpleks o n+1 lub 2n wierzchołkach
- Obliczyć środek symetrii sympleksu
- Zastosować operacje:
  - Operacja odbicia
  - Operacja ekspansji
  - Operacja kontrakcji

Metoda największego spadku NS

jest to metoda gradientowa, która pozwala szukać minimum różniczkowalnej funkcji nieliniowej f(x).

Koncepcja metody wynika z lematu, w którym wykazano, że jeśli istnieje kierunek d w przestrzeni R^n taki, że

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$$

to

$$f(x + \tau d) < f(x)$$

Algorytm obliczeń – metoda NS

(1) Wybierz punkt startowy $\mathbf{x^o=x^k}$. Oblicz wartość funkcji $\boldsymbol{f(x^k)}$ oraz jej gradient $\boldsymbol{\nabla f(x^k)}$

(2) Zbadaj kryterium zbieżności:

$$\left\langle \nabla f(x^k), \nabla f(x^k) \right\rangle = 0 \quad czyli \quad \left\langle \nabla f(x^k), \nabla f(x^k) \right\rangle \le \varepsilon$$

$$gdzie \quad \varepsilon \in [0, \delta] \quad np.: \varepsilon = 10^{-6}$$

Jeśli tak, to koniec, jeśli nie, to przejdź do (3)

(3) Wyznacz kierunek poszukiwań :

$$d^k = -\nabla f(x^k)$$

(4) Wykonaj minimalizację kierunkową wybraną metodą:

$$x^{k+1} \in T(x^k, d^k)$$

(5) Podstaw $x^k \Leftarrow x^{k+1}$ *oraz* $k \Leftarrow k+1$ *i powtórz* (1)

Do minimalizacji w kierunku zastosowano gradientowy algorytm bisekcji z testem dwuskośnym Goldstein'a :

Algorytm bisekcji z testem dwuskośnym Golstein'a – algorytm gradientowy

Praktycznie do wyszukania punktów spełniających test dwuskośny Goldsteina stosuje się następujący algorytm bisekcji:

(1) Oblicz pochodną w kierunku $p = \nabla f(x^o)^T d$ oraz współczynnik kroku $\tau_R > 0 \quad taki, że \quad f(x^0 + \tau_R d) < f(x^0)$

(2) Wyznacz $\tau = \frac{1}{2}(\tau_L + \tau_R).$ $Oblicz \quad f(x^0 + \tau d).$

(3) Jeśli $f(x^0 + \tau d) < f(x^0) + (1-\beta) p \tau$ to podstaw $\tau_L \Rightarrow \tau$ i przejdź do kroku (2), w przeciwnym razie przejdź do kroku (4)

(4) Jeśli $f(x^0 + \tau d) > f(x^0) + \beta p \tau$ to podstaw $\tau_R \Rightarrow \tau$

i przejdź do kroku (2), w przeciwnym przypadku koniec.

Działanie algorytmu bisekcji z testem dwuskośnym Goldstein'a dla funkcji:

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 - 6x_1 + x_1x_2$$

- punkt początkowy $x^0 = [0, 0]^T$
- kierunek $d = [1, 0]^T$
- współczynnik testu $\beta = \frac{2}{5}$
- początkowa wartość współczynnika kroku $\tau_R = 9$
- dokładność dla testu $\varepsilon' = 10^{-5}$

Pochodna w kierunku $p = \nabla f(x^o)^T d$
zatem mamy:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right] = \left[2x_1 - 6 + x_2, 4x_2 + x_1\right]$$

dla $x = x^0 = [0, 0]^T$

$$\nabla f(x^0) = \left[-6, 0\right]$$

Otrzymujemy wartość pochodnej p:

$$p = \nabla f(x^o)^T d = [-6 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -6$$

(2) Obliczamy $\tau = \frac{1}{2}(\tau_L + \tau_R)$ oraz $f(x^0 + \tau d).$

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_R) = \frac{1}{2}(9) = 4{,}5$$

$$f(x^0 + \tau d) = f\left[(0,0) + (4{,}5 \quad ,0)\right] = 20{,}25 - 27 = -6{,}75$$

Przechodzimy do kroku (3)

(3) Jeżeli $f(x^0 + \tau d) < f(x^0) + (1-\beta) p \tau$
to podstaw $\tau_L \Rightarrow \tau$
i przejdź do kroku (2). W przeciwnym wypadku przejdź do kroku (4)

sprawdzamy: -6,75 <? $0 + (-6) \cdot (0{,}6) \cdot (4{,}5) = -16{,}2$

NIE

Przechodzimy do kroku (4)

(4) Jeżeli $f(x^* + \tau d) > f(x^*) + \beta p \tau$
to podstaw $\tau_R \Rightarrow \tau$
i przejdź do kroku (2). W przeciwnym wypadku KONIEC

sprawdzamy: -6,75 >? $0 + (-6) \cdot (0{,}4) \cdot (4{,}5) = -10{,}8$

TAK

i przechodzimy do kroku (2)
DRUGA ITERACJA
(...)
Po trzeciej iteracji otrzymujemy wynik

$$\tau = 3{,}375$$

Działanie algorytmu najszybszego spadku dla funkcji:
$f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 - 2\,x_1x_2$

- punkt początkowy $x^0 = [2, 3]^T$
- współczynnik testu $\beta = \frac{1}{4}$
- początkowa wartość współczynnika kroku $\tau_R = 1$

- Obliczamy $d^0 = -\nabla f(x^0) = [-2, -2]^T$
- Ponieważ pierwsza stosowana wartość współczynnika kroku $\tau_R = 1$ spełnia test dwuskośny Goldsteina, więc:
- $x^1 = x^0 + \tau_0 d^0 = [0\ 1]^T$ $\quad d^1 = -\nabla f(x^1) = [2\ \ -2]^T$
- W drugiej iteracji mamy:

$$f(x^1 + \tau d^1) = 20\tau^2 - 8\tau + 1$$

- Otrzymujemy:

$$p = \nabla f(x^1)^T d^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad -2] = -8$$

- Zatem test dwuskośny ma postać
- $-6 \le 20\tau^2 - 8\tau \le -2$
- Za pomocą algorytmu bisekcji (test dwuskośny Goldsteina) w trzeciej próbie znajdujemy wartość współczynnika $\tau_1 = 0{,}25$

Stąd

- $x^2 = x^1 + \tau_1 d^1 = [\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}]^T$
- Postępując zgodnie z algorytmem otrzymujemy kolejne wartości punktów optymalizowanej funkcji.

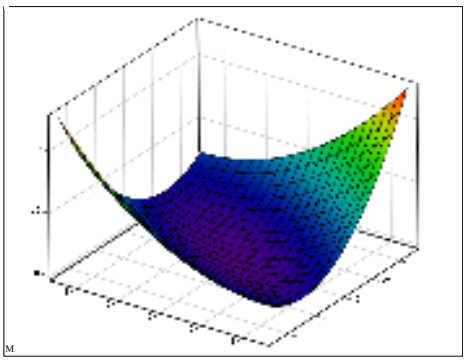
- Kolejno podane są punkty wyznaczone za pomocą algorytmu najszybszego spadku dla funkcji:
- $f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 - 2\,x_1x_2$
- $x^0 = [2\ 3]$
- $x^1 = [0\ 1]$
- $x^2 = [\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}]$
- $x^3 = [\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{2}]$
- $x^4 = [\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}]$ itd....

- I tak kolejno, aż do momentu gdy zostanie spełniony warunek

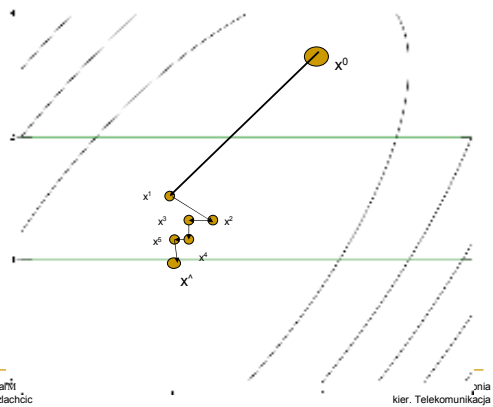
$$\left\langle \nabla f(\hat{x}), \nabla f(\hat{x}) \right\rangle < \varepsilon = 10^{-3}$$

Tak uzyskano rozwiązanie optymalne $x^k = [0,0]$ i $f(x^k) = 0$.

Funkcja celu f(x)



Kolejne iteracje metody największego spadku NS



Algorytm obliczeń – metoda Newtona

(1) Wybierz punkt startowy $\mathbf{x^o=x^k}$. Oblicz wartość funkcji $f(x^k)$ oraz jej gradient $\nabla f(x^k)$

(2) Zbadaj kryterium zbieżności:

$$\left\langle \nabla f(x^k), \nabla f(x^k) \right\rangle = 0 \quad czyli \quad \left\langle \nabla f(x^k), \nabla f(x^k) \right\rangle \le \varepsilon$$

$$gdzie \quad \varepsilon \in [0, \delta] \quad np.: \varepsilon = 10^{-6}$$

Jeśli tak, to koniec, jeśli nie, to przejdź do (3)

(3) Wyznacz kierunek poszukiwań :

$$d^k = -H^{-1} \nabla f(x^k)$$

(4) Wykonaj minimalizację kierunkową wybraną metodą:

$$x^{k+1} \in T(x^k, d^k)$$

(5) Podstaw $x^k \Leftarrow x^{k+1}$ *oraz* $k \Leftarrow k+1$ *i powtórz* (1)

Kierunki poszukiwań dla metod gradientowych

- 1. **Metoda Polak'a-Ribier'y:**

  Wyznacz kierunek sprzężony $d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k d^k$

  gdzie: $\beta_k = \dfrac{\left\langle (\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)), \nabla f(x^{k+1}) \right\rangle}{\left\langle \nabla f(x^k), \nabla f(x^k) \right\rangle}$

- 2. **Metoda Fletcher'a-Reeves'a**

  Wyznacz kierunek sprzężony $d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k d^k$

  gdzie: $\beta_k = \dfrac{\left\langle \nabla f(x^{k+1}), \nabla f(x^{k+1}) \right\rangle}{\left\langle \nabla f(x^k), \nabla f(x^k) \right\rangle}$

- 2. **Metoda Davidon'a-Fletcher'a-Powell'a (DFP)**

DFP – modyfikacja macierzy V_{k+1} polegająca na dodawaniu w każdej kolejnej iteracji do aktualnej macierzy V_k czynnika powodującego dążenie macierzy V_k do macierzy H^{-1}.

$$d^k = -V_k \nabla f(x^k)$$
$$x^{k+1} = x^k + \beta_k d^k$$
$$V_{k+1} = V_k + \frac{d^k >< d^k}{\left\langle d^k, A d^k \right\rangle}$$

Algorytm Nelder'a- Meade'a – metoda sympleksu NM dla zadań bez ograniczeń
Algorytm Compleks dla zadań z ograniczeniami

- Utworzyć simpleks o n+1 lub 2n wierzchołkach
- Obliczyć środek symetrii sympleksu
- Zastosować operacje:
  - Operacja odbicia
  - Operacja ekspansji
  - Operacja kontrakcji

Algorytmy optymalizacji z ograniczeniami

W celu uwzględnienia ograniczeń można postąpić w poniższy sposób:
- dokonać transformacji zmiennych decyzyjnych
- dokonać transformacji funkcji celu wprowadzając funkcje kary.

Przykłady transformacji zmiennych dla typowych ograniczeń:

1.	$x_i \ge 0$	$x_i = u_i^2$ $x_i = \exp(u_i)$ $x_i = \lvert u_i \rvert$
2.	$0 \le x_i \le 1$	$x_i = \sin^2 u_i$ $x_i = \dfrac{\exp(u_i)}{\exp(u_i) + \exp(-u_i)}$
3.	$a_i \le x_i \le b_i$	$x_i = a_i + (b_i - a_i)\sin^2(u_i)$

Algorytmy optymalizacji z ograniczeniami cd.

Transformacja funkcji kryterialnej:

$$P(x, \sigma, \theta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \varphi(g_i(x) + \theta_i)\, H(g_i(x) + \theta_i)$$

Funkcja kary charakteryzuje się tym, że w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych ***X*** przyjmuje wartość równą zeru lub bliską zeru, a poza tym obszarem przyjmuje bardzo duże wartości.

Gdzie: $\sigma_i > 0, \sigma = [\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m]$ jest wektorem współczynników kary

$\theta_i > 0, \theta = [\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m]$ jest wektorem przesunięć kary

$\varphi(\,)$ funkcja kary

$$\varphi(g_i(x) + \theta_i): \quad np. (g_i(x) + \theta_i)^2 \quad \text{lub} \; (-g_i^{-1}(x) + \theta_i)$$

Algorytmy optymalizacji z ograniczeniami cd.

Funkcja H ma poniższą własność:

$$H(g_i(x)+\theta_i)=\begin{cases}1 & dla\ g_i(x)+\theta_i>0\\ 0 & dla\ g_i(x)+\theta_i\le 0\end{cases}$$

1. **Metody zewnętrznej funkcji kary (metoda Couranta, metoda Schmita i Foxa)**
2. **Metody wewnętrznej funkcji kary (metoda Rosenbrocka, metoda Carolla)**
3. **Metody przesuwanej funkcji kary (metoda Powella).**