Sformułowanie zadania optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami

Funkcja celu f(x) : $f(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych x, należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych X

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in X$

gdzie :
$X = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,m\},$
$g_i(x): X = R^n \to R^1.$

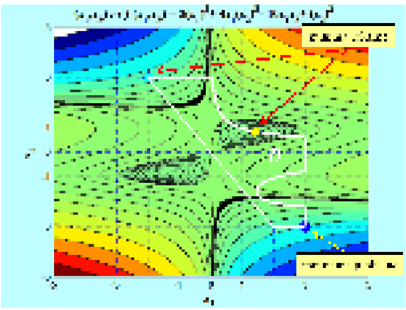
$$f\left(\hat{\mathbf{x}}\right) \le f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi: $\min_{x \in X} f(\mathbf{x}) = f\left(\hat{\mathbf{x}}\right)$

Przykład nieliniowego zadania optymalizacji z ograniczeniami

$$\min_{x \in X} f(x) = 2(x_1)^2 + 4x_1(x_2)^3 - 10x_2x_1 + (x_2)^2$$

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1(x_2)^2(2.4 + x_2) \le 3$$
$$\wedge\ 3/2x_1 + x_2 \ge 0$$
$$\wedge\ (-3 \le x_i \le 3, i = 1,2)\}.$$



Funkcja Lagrange'a

DEFINICJA.

Funkcją Lagrange'a zadania PN nazywamy skalarną funkcję

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \langle \boldsymbol{\lambda}, g(\mathbf{x}) \rangle,$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} \in R^m$ jest wektorem mnożników Lagrange'a.

Sformułowanie zadania optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami

DEFINICJA. Kierunek d poprowadzony z punktu x jest dopuszczalny, jeśli istnieje takie $\sigma > 0$ że dla dowolnego

$$\tau \in [0; \sigma], \mathbf{x} + \tau\mathbf{d} \in X\ ,$$

gdzie X_0 oznacza zbiór określony jako PN.

Zbiór wszystkich kierunków dopuszczalnych :

$$D(x) = \{d : \exists \sigma > 0 \text{ takie, że}$$
$$\tau \in [0; \sigma] \Rightarrow \mathbf{x} + \tau\mathbf{d} \in X\ \}.$$

Ograniczenia aktywne:

Definicja

Ograniczenie $g_i(x) \le 0$ jest aktywne w punkcie optymalnym $\hat{x}$, jeżeli

$$g_i(\hat{x}) = 0$$

Gdy spełnione jest $g_i(\hat{x}) < 0,$ to warunek ten nazywany jest nieaktywnym.

1. $g_i(\hat{\mathbf{x}} + \tau\mathbf{d}) \le 0, \quad \forall i \in A(\hat{\mathbf{x}})$ przy czym $\tau \in [0, \sigma]$

$A(\hat{x}) = \left\{ i : g_i(\hat{x}) = 0 \right\}$

$A(\hat{x})$ - zbiór indeksów ograniczeń aktywnych

2. $g_i(\hat{\mathbf{x}} + \tau\mathbf{d}) = g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \tau\langle \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle + O(\tau) \le 0$

3. warunkiem koniecznym na to, aby kierunek *d* był dopuszczalny jest:

$$\langle \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle \le 0, \quad \forall i \in A(\hat{\mathbf{x}})$$

Lemat Farkasa

Niech będzie dany w R^n zbiór n-wymiarowych wektorów $\{b, a^i, i = 1,\dots,m\}$. Nierówność

$$\langle b, x\rangle \ge 0$$

zachodzi dla każdego $x \in R^n$, spełniającego

$$\langle -a^i, x\rangle \ge 0,$$

Wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda = [\lambda_1,\dots,\lambda_m]^T \ge 0$

takie, że

$$b + \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 a^i = 0.$$

Wzajemnie rozłączne zbiory kierunków

$$D_1(\hat{x}) = \left\{d : <\nabla g_i(\hat{x}), d> \le 0, i \in A(\hat{x}), <\nabla f(\hat{x}), d> \ge 0\right\}$$

$$D_2(\hat{x}) = \left\{d : <\nabla g_i(\hat{x}), d> \le 0, i \in A(\hat{x}), <\nabla f(\hat{x}), d> < 0\right\}$$

$$D_3(\hat{x}) = \left\{d : <\nabla g_i(\hat{x}), d> 0 \ dla \ pewnych \ i \in A(\hat{x})\right\}$$

$$D(\hat{x}) = D_1(\hat{x}) \cup D_2(\hat{x}) \cup D_3(\hat{x})$$

Warunki konieczne Kuhn'a-Tucker'a-Karusch'a

TWIERDZENIE. Jeśli

a) funkcje f i g_i *dla* $i = 1,\dots, m$ **są różniczkowalne;**

b) $\hat{x}$ **jest lokalnym minimum ZPN, to istnieje** $\hat{\lambda} \ge 0, \dim \hat{\lambda} = m.$

takie, że

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{m},$$

Wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_2(\hat{x}) = \phi$$

Dowód warunków koniecznych Kuhn'a-Tucker'a-Karuscha

DOWÓD. Niech $b = \nabla f(\hat{x})$ oraz

$$a^i = \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}), \qquad \forall i \in A(\hat{\mathbf{x}})$$

wówczas zgodnie z lematem Farkasa, istnieje $\hat{\lambda}_i \ge 0, \ i \in A(\hat{\mathbf{x}})$

takie, że

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in A(\hat{\mathbf{x}})} \hat{\lambda}_i (-\nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}))$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle \nabla f(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{d}\rangle \ge 0, \quad \forall \mathbf{d} \in R^n,$$

Spełniającego warunek dla ograniczeń:,

$$\langle \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{d}\rangle \le 0, \qquad \forall i \in A(\hat{\mathbf{x}})$$

tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_2(\hat{x}) = \phi$$

Dowód warunków koniecznych Kuhn'a-Tucker'a-Karuscha

Dla $i \notin A(\hat{\mathbf{x}})$ należy przyjąć $\hat{\lambda}_i = 0$

Więc są spełnione dwa równania:

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda} \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{m},$$

Ckd

Ilustracja warunków koniecznych Kuhn'a-Tucker'a-Karuscha

Przyklad I

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{l} -x_2 + x_1^2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 2 \end{array} \right\}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [1, 1]^T \qquad f(\hat{\mathbf{x}}) = 2$$

Warunki konieczne Kuhn'a-Tucker'a-Karusch'a z wykorzystaniem funkcji Lagrange'a

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

warunki konieczne:

$$\nabla_x L(\hat{\mathbf{x}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{0},$$

$$\left\langle \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \nabla_\lambda L(\hat{\mathbf{x}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \right\rangle = 0$$

$$\nabla_\lambda L(\hat{\mathbf{x}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \le \mathbf{0}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} \ge 0$$

Warunki wystarczające optymalizacji określane jako warunki regularności ograniczeń:

1. **Wszystkie funkcje ograniczeń $g_i(x)$ są liniowe – warunek regularności Karlina.**
2. **Wszystkie funkcje ograniczeń $g_i(x)$ są funkcjami wypukłymi oraz zbiór rozwiązań dopuszczalnych ma niepuste wnętrze – warunek regularności Slatera**
3. **Gradienty wszystkich ograniczeń aktywnych, a więc $\nabla g_i(\hat{x})$, dla $i \in A(\hat{x})$, są liniowo niezależne – warunek regularności Fiacco i McCormicka.**

Twierdzenie Kuhn'a-Tucker'a-Karuscha – warunki konieczne i wystarczające dla zadania optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami

TWIERDZENIE. Jeśli

a) funkcje f i g_i *dla* $i = 1,\dots, m$ **są różniczkowalne;**

b) $\hat{x}$ **jest lokalnym minimum ZPN,**

c) Warunek regularności ograniczeń jest spełniony w $\hat{x}$ **to istnieje**

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} \ge 0, \dim \hat{\boldsymbol{\lambda}} = m.$$

taki, że w punkcie $\hat{\mathbf{x}}$ **zachodzą warunki konieczne Kuhn'a-Tucker'a-Karuscha :**

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{m},$$

Ilustracja warunków koniecznych i wystarczających Kuhn'a-Tucker'a-Karusch'a

Przykład I

Minimalizacja funkcji *f(x)* przy zbiorze ograniczeń nierównościowych *X*

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_1 x_2 + 0.5 x_2^{\ 2} - x_1 - x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{r} x_1 + x_2 \le 0 \\ x_2 \ge 2 \end{array} \right\}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [-2, 2]^T \qquad f(\hat{\mathbf{x}}) = 2$$

Różne przypadki aktywności ograniczeń

Sformułowanie zadania optymalizacji nieliniowej PN z ograniczeniami dodatkowo na zmienne decyzyjne x :

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}),$$

gdzie :

$$X = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \le 0, \mathbf{x} \ge 0, \ i = 1,\dots,m\},$$

$$f(x) : R^n \to R^1$$

oraz $g_i(x) : R^n \to R^1, i = 1,\dots,m$

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

Warunki Lagrange'a dla zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami oraz gdy zmienne decyzyjne x≥0

$$\nabla_x L\left(\hat{x},\hat{\lambda}\right) \ge 0 \qquad \nabla_\lambda L\left(\hat{x},\hat{\lambda}\right) \le 0$$

$$\left\langle \hat{\mathbf{x}}, \nabla_x L\left(\hat{x},\hat{\lambda}\right) \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \hat{\lambda}, \nabla_\lambda L\left(\hat{x},\hat{\lambda}\right) \right\rangle = 0$$

$$\hat{\mathbf{x}} \ge 0 \qquad \hat{\lambda} \ge 0$$

Ilustracja warunków koniecznych i wystarczających Kuhn'a-Tucker'a-Karusch'a

Przykład II

Minimalizacja funkcji *f(x)* przy zbiorze ograniczeń nierównościowych oraz ograniczeniach na znak zmiennej decyzyjnej

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) = x_1^{\,2} + (x_2 - 4)^2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{r} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [-1, 3]^T \qquad f(\hat{\mathbf{x}}) = 2.0$$

Sformułowanie zadania optymalizacji nieliniowej ZPN z ograniczeniami mniejszościowymi i równościowymi:

$$f(\hat{x}) = \min_{x\in X} f(x)$$

gdzie :

$$X = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,..., p,\quad h_i(x) = 0, i = p+1,...,m\},$$

Gdzie:

$$f(x) : X = R^n \to R^1$$
$$g_i(x) : X = R^n \to R^1,\ i = 1,..., p$$
$$h_i(x) : X = R^n \to R^1,\ i = p+1,...,m$$

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i h_i(\mathbf{x}).$$

Warunki Kuhn'a-Tuckera dla ZPN z ograniczeniami mniejszościowymi i równościowymi

Jeśli

a) funkcje f i g_i **są różniczkowalne;**
b) $\hat{x}$ **jest lokalnym minimum ZPN,**

To istnieją $\hat{\lambda}_i,\ i = 1,..., p$

oraz istnieją $\hat{\lambda}_i,\ i = p+1,...,m$ o nieograniczonym znaku, takie że:

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i \nabla g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{p}$$

Ilustracja warunków koniecznych i wystarczających Kuhn'a-Tucker'a-Karusch'a

Przykład III

Minimalizacja funkcji *f(x)* przy zbiorze ograniczeń nierównościowych oraz zbiorze ograniczeń równościowych

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) = x_1^{\,2} + x_1 x_2 + x_2^{\,2}$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{r} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [2, 0]^T \qquad f(\hat{\mathbf{x}}) = 4$$