Sformułowanie zadania optymalizacji nieliniowej bez ograniczeń:

Funkcja celu f(x) :

$$f(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych x, należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych R^n

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in R^n$

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

Zadanie programowania nieliniowego bez ograniczeń

DEFINICJA.

Kierunkiem d w przestrzeni R^n nazywamy dowolny n-wymiarowy wektor kolumnowy. Niech będzie dany punkt $\mathbf{x} \in R^n$ oraz skalar $\tau \in [0;+\infty)$. Dowolny punkt $\mathbf{y} \in R^n$ leżący na półprostej wychodzącej z punktu x w kierunku $d \neq 0$ będzie wówczas określony zależnością

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \tau\mathbf{d}$$

LEMAT.

Niech $f : \mathbf{X} = R^n \to R^1$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}$

Załóżmy, że istnieje *d*, dla którego:

$$\langle \nabla f(x^0), d \rangle < 0,$$

Wówczas istnieje takie $\sigma > 0$, ,że dla wszystkich $\tau \in (0, \sigma]$ zachodzi

$$f(x^0 + \tau d) < f(x^0).$$

Dowód: wynika z własności różniczki Gateaux.

Zadanie programowania nieliniowego bez ograniczeń

Twierdzenie. Niech $f : \mathbf{X} = R^n \to R^1$ będzie funkcją różniczkowalną . Jeśli $\hat{x} \in X$ minimalizuje funkcję *f(x)* tzn.

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

to

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

Dowód: nie wprost.

Punkt $\hat{x}$ jest nazywany punktem stacjonarnym.

Twierdzenie. Niech $f : X = R^n \to R^1$ będzie funkcją wypukłą i różniczkowalną. Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in X$ stanowi minimum globalne funkcji

$$f(x), \text{ tzn } f(\hat{x}) \le f(x),$$

dla każdego $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{x}$ spełnia warunek

$$\nabla f(\hat{x}) = 0$$

Jest to warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego *f(x)* w punkcie $\hat{x}$

Minimum globalne funkcji f(x)

Twierdzenie:

Jeśli $f : X = R^n \to R^1$ będzie funkcją ściśle wypukłą i różniczkowalną, to wektor $\hat{\mathbf{x}} \in X$ spełniający warunek konieczny $\nabla f(\hat{x}) = 0$ jest jedynym minimum globalnym funkcji f(x).

Warunki wystarczające optymalizacji dla zadania bez ograniczeń

Funkcja f(x) jest funkcją ciągłą i dwukrotnie różniczkowalną. Posiada macierz drugich pochodnych (hesjan) - A

Macierz A posiada ciąg podwyznaczników głównych $|A|_i$

$$|A|_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \right|$$

$$|A|_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \ldots\ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_i}(x) \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_1}(x) & \ldots\ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \end{vmatrix}$$

$$|A|_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_i}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_i}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{vmatrix}$$

Warunki stacjonarności dla zadania optymalizacji nieliniowej bez ograniczeń cd.

Twierdzenie:

Założono, że $\hat{x}$ jest punktem stacjonarnym funkcji *f(x)*. Wówczas zachodzą poniższe zależności:

1. Jeśli hesjan A jest dodatnio określony tzn: $\left|A(\hat{x})\right|_i > 0 \quad dla \quad i = 1,\ldots,n$ to funkcja f(x) ma minimum lokalne w tym punkcie

2. Jeśli hesjan A jest ujemnie określony tzn: $(-1)^i \left|A(\hat{x})\right|_i > 0 \quad dla \quad i = 1,\ldots,n$ to funkcja f(x) ma maksimum lokalne w tym punkcie

3. Jeśli hesjan A jest pół-dodatnio określony tzn: $\left|A(\hat{x})\right|_i \ge 0 \quad dla \quad i = 1,\ldots,n-1 \quad oraz \quad \left|A(\hat{x})\right|_n = 0$ bądź hesjan pół-ujemnie określony

$$(-1)^i \left|A(\hat{x})\right|_i \ge 0 \quad dla \quad i = 1,\ldots,n-1 \quad oraz \quad \left|A(\hat{x})\right|_n = 0$$

to nie można rozstrzygnąć o typie ekstremum funkcji *f(x)* w tym punkcie

4. Jeśli nie są spełnione warunki 1 i 2 z nieostrymi nierównościami (wówczas hesjan A nie jest określony) to funkcja *f(x) nie ma ekstremum w punkcie* $\hat{x}$

Warunek stacjonarności:
poprawić gradient $\nabla f(x)$ i hesjan A

TWIERDZENIE. Jeśli funkcja *f(x)* jest dwukrotnie różniczkowalna, to w każdym jej minimum lokalnym bez ograniczeń spełnione są następujące warunki konieczne optymalności zadania ZPN bez ograniczeń.

$\nabla f\left(\hat{x}\right) = 0$ warunek I rzędu

$d^T A(\hat{x}) d > 0$ dla $\forall d \neq 0$ warunek II rzędu

$A = \nabla^2 f(\hat{x})$ Macierz *A* jest macierzą ściśle dodatnio określoną

- **Warunek I** rzędu jest często nazywamy warunkiem stacjonarności, ponieważ oznacza zerowanie się pierwszej pochodnej.
- **Warunek II** rzędu dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnych implikuje lokalną wypukłość minimalizowanej funkcji celu.