

METODY OPTIMALIZACJI

Wydział Elektroniki
Kier. Elektronika
Studia II st. - magisterskie

Wykład II
Przykłady zastosowań

Formułowanie zadania optymalizacji

- Określenie procesu technologicznego, zjawiska fizycznego czy systemu ekonomicznego
- Modelowanie procesu – opis matematyczny sformułowany w postaci przeznaczony do optymalizacji:
 - x – wektor zmiennych decyzyjnych
 - n – liczba zmiennych decyzyjnych
 - $f(x)$ – funkcja celu (kryterium jakości)
 - X – przestrzeń rozwiązań
 - X_D – zbiór rozwiązań dopuszczalnych
 - \hat{x} – optymalny wektor zmiennych decyzyjnych

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$f(x): R^n \rightarrow R^1$$

$$\min_{x \in X_D} f(x) = f(\hat{x})$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
kier.Elektronika studia magisterskie

Zadania programowania liniowego

Przykład I – zadanie programowania liniowego

Znajdź wektor $x=[x_1, x_2]$, który maksymalizuje liniową funkcję celu

przy ograniczeniach

$$x_0 = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$n=2, m=3$

Przykład II – zadanie maksymalizacji zysku w procesie produkcji

$$\max_{x \in X_D} x_0 = 9x_1 + 8x_2$$

$$X_D = \left\{ x \mid \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 25, x \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \right\}$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
kier.Elektronika studia magisterskie

Zadania programowania liniowego

Przykład III – zadanie optymalnego rozkroju

Znajdź wektor $x=[x_1, x_2]$, który maksymalizuje liniową funkcję celu

$$\min_{x \in X} x_0 = 0.3x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3$$

przy ograniczeniach

$$X = \left\{ x : \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 0x_3 \geq 2100 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 1200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \right.$$

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
kier.Elektronika studia magisterskie

Przykład IV

Maksymalizacja zysków w procesie produkcji w fabryce papieru.



Cel: Optymalny poziom produkcji papieru niskiej i wysokiej jakości przy uwzględnieniu ograniczeń.

Zakład przemysłowy produkuje papier niskiej i wysokiej jakości. Do produkcji wykorzystywane są następujące składniki:

- pulpa drzewna
- chemikalia
- szmaty lniane
- woda

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
kier.Elektronika studia magisterskie

Ceny surowców kształtują się następująco:

Surowiec	Cena jednost. [zł/jedn.]
Pulpa	3
Chemikalia	4
Szmaty lniane	9

Woda jest wolna od opłat.

Jej zużycie jest nielimitowane.

W zależności od tego, czy produkowany jest papier niskiej, czy wysokiej jakości zużywana jest różna ilość surowców.

Surowiec/jedn. ostkę	Jakość papieru	
	Niska	Wysoka
Pulpa	1,10	1,50
Chemikalia	0,10	0,20
Szmaty	0,10	0,40

Metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki
kier.Elektronika studia magisterskie

Koszt wyprodukowania jednostki papieru:

- niskiej jakości wynosi - 1,8 [zł],
- wysokiej jakości - 1,5 [zł].

Cena sprzedaży jednostki produktu końcowego wynosi :

- 10,0 [zł] dla produktu niskiej jakości
- 16,5 [zł] dla produktu wysokiej jakości.

Efektom ubocznym przy produkcji papieru są ścieki. Podczas wytwarzania jednostki papieru niskiej jakości powstają 3 jednostki ścieków, zaś w przypadku papieru o wysokiej jakości powstaje 6 jednostek ścieków.

Część ścieków poddawana jest procesowi oczyszczania w wyniku czego ilość zanieczyszczenia jest redukowana o 50%. Pozostała część ścieków jest odprowadzana do kanałów. Koszt tych operacji przedstawia się następująco:

- Oczyszczanie ścieków powstałych przy produkcji papieru niskiej jakości = 0,11 [zł] na jednostkę produkcyjną,
- oczyszczanie ścieków powstałych przy produkcji papieru wysokiej jakości = 0,12 [zł] na jednostkę produkcyjną,
- Koszt odprowadzenia jednostki ścieków do kanałów = 0,3 [zł].

Proces produkcyjny obarczony jest z góry nałożonymi ograniczeniami:

- Zakład może zakupić maksymalnie 50 jednostek pulpy drzewnej
- Maksymalna przepustowość oczyszczalni ścieków wynosi 60 jednostek
- Ze względu na kooperację zakład musi wytworzyć przynajmniej 12 jednostek papieru niskiej jakości

Cel: znalezienie optymalnego poziomu produkcji papieru niskiej i wysokiej jakości, takiego aby zysk przedsiębiorstwa był maksymalny.
Uwzględnić należy wszystkie koszty generowane przez proces produkcyjny oraz ograniczenia tegoż procesu.

W celu znalezienia maksymalnego dochodu, należy zmaksymalizować funkcję celu przedstawiającą dochód zakładu produkcji papieru.

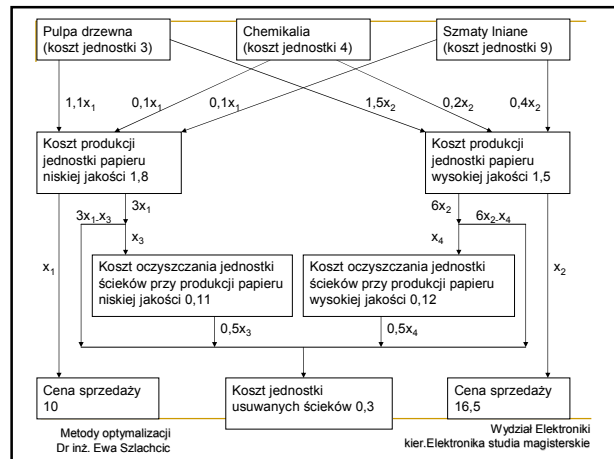
Definicja problemu programowania liniowego PL

Wektor zmiennych decyzyjnych:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

gdzie:

- x_1 - wielkość produkcji papieru niskiej jakości
- x_2 - wielkość produkcji papieru wysokiej jakości
- x_3 - ilość oczyszczanych ścieków przy produkcji papieru niskiej jakości
- x_4 - ilość oczyszczanych ścieków przy produkcji papieru wysokiej jakości.



Wyznaczenie funkcji celu i ograniczeń zadania produkcji papieru

$$10x_1 + 16,5x_2 \quad \text{dochód}$$

$$1,8x_1 + 1,5x_2 \quad \text{koszty produkcji}$$

$$3 \cdot 1,1x_1 + 4 \cdot 0,1x_1 + 9 \cdot 0,1x_1 \quad \text{koszty materiałów do produkcji papieru niskiej jakości}$$

$$3 \cdot 1,5x_2 + 4 \cdot 0,2x_2 + 9 \cdot 0,4x_2 \quad \text{koszty materiałów do produkcji papieru wysokiej jakości}$$

$$0,11x_1 + 0,12x_2 \quad \text{koszty oczyszczania ścieków}$$

$$0,3[(3x_1 - x_3) + 0,5x_3 + (6x_2 - x_4) + 0,5x_4] \quad \text{koszt odprowadzenia ścieków}$$

W celu znalezienia maksymalnego zysku, należy zmaksymalizować funkcję celu w postaci: dochód - koszty.

$$\begin{aligned} \max_x F(X) &= 10x_1 + 16,5x_2 - (1,8x_1 + 1,5x_2) - (3 \cdot 1,1x_1 + 4 \cdot 0,1x_1 + 9 \cdot 0,1x_1) + \\ &\quad - (3 \cdot 1,5x_2 + 4 \cdot 0,2x_2 + 9 \cdot 0,4x_2) - (0,11x_1 + 0,12x_2) + \\ &\quad - (0,3[(3x_1 - x_3) + 0,5x_3 + (6x_2 - x_4) + 0,5x_4]) = \\ &= 2,7x_1 + 4,4x_2 + 0,04x_3 + 0,03x_4 \end{aligned}$$

Zatem funkcja celu jest postaci:

$$\max_{x \in X} F(x) = 2,7x_1 + 4,4x_2 + 0,04x_3 + 0,03x_4$$

Uwzględniając następujące ograniczenia X:

- maksymalna ilość pulpy $1,1x_1 + 1,5x_2 \leq 50$
- maksymalna przepustowość oczyszczalni ścieków $x_3 + x_4 \leq 60$
- wymaganie nieujemnego przepływu $3x_1 - x_3 \leq 0$
- wymaganie nieujemnego przepływu $6x_2 - x_4 \leq 0$
- wymaganie wyprodukowania określonej liczby papieru niskiej jakości $x_1 \geq 12$
- Wymaganie produkowania określonej liczby papieru wysokiej jakości: $x_2 \geq 0$

Zadanie maksymalizacji zysku produkcji papieru

$$\max_{x \in X} x_0 = 2.7x_1 + 1.5x_2 + 0.04x_3 + 0.03x_4$$

$$\begin{cases} 1.1x_1 + 1.5x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ 3x_1 - x_3 \geq 0, \quad x \geq 0 \\ 6x_2 - x_4 \geq 0 \\ x_1 \geq 12 \end{cases}$$

Przykład V: Znaleźć najlepszą liniową aproksymację nieznanej funkcji określonej poprzez tabelę 20 pomiarów.

Wyznaczyć optymalne wartości wektora współczynników $b = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ formy liniowej :
 $y = b^T u$

gdzie: u - wektor wielkości sterujących, y - wektor wielkości wyjściowych

Dane: tabela z 20 pomiarami wektora u wielkości sterujących oraz wektora wielkości wyjściowych

dla następujących kryteriów jakości:

1. minimum sumy wartości bezwzględnych różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:

$$\min [f(b) = \sum_{i=1}^{20} |\tilde{y}_i - y_i(b)|]$$

gdzie: \tilde{y}_i $i=1, \dots, 20$ - wartości zmierzone wielkości wyjściowych

$y_i(b)$ $i=1, \dots, 20$ - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu

$$y_i(b) = b_1 u_{i1} + b_2 u_{i2} + b_3 u_{i3} + b_4 u_{i4}$$

Zadanie trudne do rozwiązania, ponieważ funkcja celu jest nie-różniczkowalna.

Równoważne zadanie programowania liniowego

Wprowadzono nową zmienną: $z_i = |\tilde{y}_i - y_i(b)|$

- Zwiększenie wymiaru zadania: 24 zmienne niezależne

$$\min f(b) = \sum_{i=1}^{20} z_i$$

przy ograniczeniach:

$$-z_i \leq \tilde{y}_i - b_1 u_{i1} - b_2 u_{i2} - b_3 u_{i3} - b_4 u_{i4} \leq z_i$$

dla $i=1, \dots, 20$

Zadanie programowania liniowego:

- funkcja celu jest wypukła
- rozwiązano metodą dwufazową simpleksu.

Wektor b optymalnych współczynników :

$$b_1 = 51,87 \quad b_2 = 1,232 \quad b_3 = -0,122 \quad b_4 = -1,08$$

Drugie kryterium jakości:

2. minimum sumy kwadratów różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:

$$\min [f(b) = \sum_{i=1}^{20} (\tilde{y}_i - y_i(b))^2]$$

gdzie: \tilde{y}_i $i=1, \dots, 20$ - wartości zmierzone wielkości wyjściowych

$y_i(b)$ $i=1, \dots, 20$ - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu

$$y_i(b) = b_1 u_{i1} + b_2 u_{i2} + b_3 u_{i3} + b_4 u_{i4}$$

Zadanie programowania nieliniowego:

- funkcja celu jest wypukła
- rozwiązano metodą gradientów sprzężonych w wersji Polak'a-Ribiere'y.

$$b_1 = 39,28 \quad b_2 = 1,07 \quad b_3 = 0,16 \quad b_4 = -0,94$$

Wyniki identyfikacji zależą od wyboru kryterium optymalizacji i przyjętej dokładności obliczeń.

Przykład VI. Zadania sterowania siecią dystrybucji wody minimalizujące zużycie energii elektrycznej

Dana jest sieć dystrybucji wody w postaci:

- m - węzłów,
- s - odbiorców z odpowiednimi potrzebami, w których utrzymywane jest odpowiednie ciśnienie oraz n luków, $\sigma \in R^s$
- każdy luk „ l ” charakteryzuje się przepływem y_l , $y_l \in R^n$

Opis sieci:

- spadek ciśnienia x_l na luku „ l ”: $x_l \in R^n$, $x_l = r_l y_l^2 \operatorname{sgn} y_l + d_l$
gdzie: r_l - opór hydrauliczny luku „ l ”
 d_l - różnica wysokości geodezyjnych luku „ l ”

Ograniczenia wynikające ze struktury sieci: $Ay = \sigma$

I prawo Kirchhoff'a:

A - macierz incydencji dla węzłów sieci wodociągowej,

II prawo Kirchhoff'a:

$$Bx = 0$$

B - macierz oczkowa dla węzłów sieci wodociągowej.

Sterowanie siecią dystrybucji wody, minimalizujące zużycie energii elektrycznej

$$\min f(y) = \sum_{l=1}^n f_l(y_l)$$

$$\text{gdzie: } f_l(y_l) = x_l y_l = r_l y_l^3 \operatorname{sgn} y_l + d_l y_l$$

przy ograniczeniach:

$$Ay = \sigma$$

$$Bx = 0$$

$$x_l = r_l y_l^2 \operatorname{sgn} y_l + d_l \quad \text{dla } l = 1, \dots, n$$

$$y \in R^n \quad x \in R^n \quad \sigma \in R^s$$

Przykład VII – zadanie optymalizacji topologii sieci telekomunikacyjnej

- Sieć telekomunikacyjna została zamodelowana jako graf $G=(V,E,C)$, gdzie: V – zbiór n węzłów i E – zbiór m luków oznaczających m łączy
- C_l –zbiór wybranych przepustowości kanałów
- Dana jest geograficzna lokalizacja węzłów w postaci macierzy odległości
- $C_{ij} = C(i,j)$ przepustowość łącza (i,j)
- f_{ij} - przepływ w łączu (i,j)
- x_{ij} - zmienna binarna

Jeżeli kanał (i,j) zostanie wybrany wówczas $x_{ij} = 1$, w przeciwnym przypadku $x_{ij} = 0$

Wektor x , określający topologie sieci:

$$x = \{x_{ij} : x_{ij} \in \{0,1\}, i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

Model matematyczny

- $c_{ij} = c(i,j)$ - koszt dzierżawy łącza (i,j)
- E_x - zbiór wybranych kanałów
- C_x - zbiór wybranych przepustowości dla łączy

$$i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

$G_x = (V, E_x, C_x)$ – graf składający się ze zbioru węzłów V i zbioru wybranych łączy

$$E_x = \{(i, j) : x_{ij} = 1 \text{ and } C_{ij} \neq 0, \text{ for } i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$c_{ij}(C_{ij}, I_{ij}) = \frac{C_{ij}}{64} \cdot [c_s(I_{ij}) + c_z(I_{ij}) + c_w(C_{ij})]$$

Zadanie projektowania topologii sieci telekomunikacyjnej

Zdefiniowanie kryteriów jakości w systemie

1. Koszt utworzenia i eksploatacji sieci telekomunikacyjnej:

$$c(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(C_{ij}, I_{ij}) x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

2. Średnie opóźnienie pakietów w sieci, opisanej topologią połączeń x

$$T(x) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T(x_{ij}) \rightarrow \min \quad (2)$$

gdzie:

- Opóźnienie w całej sieci

$$T(x) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{f_{ij}}{C_{ij} - f_{ij}} x_{ij}$$

- średnia liczba pakietów [pakiet/s] w sieci

$$\gamma = \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^n \gamma_{jk}$$

Ograniczenia

- Topologia sieci zupełnej – jako sieć początkowa
- Aktualny przepływ f_{ij} wzdłuż łącza (i,j) nie może przekroczyć przepustowości tego łącza C_{ij} .
 $f_{ij} < C_{ij}$
- Niezawodność sieci jest realizowana poprzez parametr spójności sieci – tzw. k -spójność, dla sieci o strukturze mesh np. dla sieci typu WAN lub MAN. $k \geq 2$
- Jeżeli przepływ f_{ij} wzdłuż łącza (i,j) zbliża się do jej przepustowości wówczas opóźnienie przesyłu pakietów C_{ij} zdąży do nieskończoności.