METODY OPTYMALIZACJI

Wydział Elektroniki
Kier. Elektronika
Studia II stopnia - magisterskie

dr inż. Ewa Szlachcic
Katedra Automatyki, Mechatroniki i Sterowania
Politechnika Wrocławska
pok. 219 C-3
ewa.szlachcic.staff.iiar.pwr.wroc.pl

Program wykładu: wprowadzenie, zasady zaliczenia

- **Programowanie nieliniowe**. Podstawy teoretyczne PN. Warunki konieczne i wystarczające optymalności. Metody dokładne i heurystyczne (m.in.. genetyczne i ewolucyjne, poszukiwanie harmonii) poszukiwania ekstremum bez ograniczeń i z ograniczeniami.
- **Programowanie liniowe**. Podstawy teoretyczne PL. Warunki konieczne i dostateczne optymalizacji liniowej. Metody typu simpleks, dualny simpleks. Inne algorytmy liniowe.
  w tym:
  Programowanie całkowitoliczbowe liniowe
  Metody odcięć. Metody podziału i ograniczeń. Klasyczne zadania optymalizacji dyskretnej (problem plecakowy, przydziału, komiwojażera, problemy szeregowania zadań.), przepływy w sieciach i zadania transportowe.
- **Programowanie wielokryterialne**

Sformułowanie zadania optymalizacji

Wektor zmiennych decyzyjnych **x**:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

gdzie: n – ilość zmiennych decyzyjnych.

Funkcja celu (funkcja kryterialna) f(x) :

$$f(\mathbf{x}) : R^n \longrightarrow R^1$$

oraz m funkcji ograniczeń $g_i(x)$:

$$g_i(\mathbf{x}) : R^n \longrightarrow R^1 \quad dla \quad i = 1, \ldots, m$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych x, należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych **X** w postaci:

$$X = \{\mathbf{x} \left| \begin{array}{ll} g_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m, \\ h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p \end{array} \right. \}$$

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in X$

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi: $\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$

Kategorie klasyfikacji zadań optymalizacji

- Model procesu:
  - Statyczny
  - Dynamiczny
  - Model procesu bez ograniczeń
  - Model procesu z ograniczeniami
- Przestrzeń rozwiązań zmiennych decyzyjnych
  - Zmienne rzeczywiste
  - Zmienne całkowitoliczbowe
    - Zmienne binarne
- Postać funkcji celu:
  - Funkcja skalarna
  - Funkcja wektorowa
- Dane o procesie niezbędne w algorytmie optymalizacji
  - Wartości funkcji celu
  - Gradient funkcji – algorytm pierwszego rzędu
  - Hesjan funkcji - algorytm drugiego rzędu

Rodzaje zadań optymalizacji ze względu na wartości zmiennych decyzyjnych

- Zadania ze zmiennymi ciągłymi – przestrzeń poszukiwań jest iloczynem kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych, n – wymiar przestrzeni zmiennych niez. $X = R^n$
  - Wypukłe – funkcja celu i zbiór rozwiązań dopuszczalnych są wypukłe
  - Niewypukłe - funkcja celu i zbiór rozwiązań dopuszczalnych mogą byc niewypukłe
- Zadania ze zmiennymi dyskretnymi – wartości zmiennych niezależnych należą do zbioru dyskretnego (zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb binarnych) $X = C^n$
- Zadania ze zmiennymi mieszanymi - wartości zmiennych niezależnych należą zarówno do zbioru liczb rzeczywistych i do zbioru liczb w postaci dyskretnej

Formułowanie i rozwiązywanie zadań optymalizacji

- Wybór modelu opisowego, a w konsekwencji struktury matematycznej modelu jest w znacznym stopniu arbitralny,
- Struktura matematyczna użyta do modelowania powinna by skończenie wymiarowa – tzn.: wyczerpująco opisana za pomocą skończonej liczby parametrów,
- Kryteria oceny modelu są ściśle związane z jego przeznaczeniem.

Wniosek:

Model uznany za adekwatny w jednym zastosowaniu może się okazać nieadekwatny w innym.

Przykłady praktycznych zastosowań:

- **Optymalne projektowanie procesów technologicznych, sieci elektrycznych, sieci rezystorów, aparatury elektronicznej**
- **Identyfikacja procesów technologicznych**
- **Optymalizacja sieci telekomunikacyjnej, sieci bezprzewodowej, sieci radiowej, sieci światłowodowej**
- **Optymalizacja sieci szkieletowej – technologia sieci neuronowych**
- **Optymalizacja wykorzystania zasobów w planowaniu rozbudowy sieci telekomunikacyjnej**
- **Optymalne zarządzanie przedsiębiorstwem - minimalizacja kosztów, maksymalizacja zysków w przedsiębiorstwie**
- **Projektowanie efektywnej struktury systemu (np. sieci komputerowej)**
- **Projektowanie optymalnego przepływu w sieciach (rozległe sieci komputerowe, sieci dystrybucji wody, sieci dystrybucji gazu)**
- **Zadania optymalnego przydziału, zadania dystrybucji produktów**
- **Zadania optymalnego rozmieszczenia (minimalizacja strat czy odpadów- optymalny rozkrój , optymalne cięcie, optymalny kształt)**

Zadanie programowania liniowego PL

$$\max \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} &\le \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x} &\ge \mathbf{b}_2 \\ A_3 \mathbf{x} &= \mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

dim **x**=n, dim **c**=n

Macierze $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ odpowiadają za współczynniki w m_1, m_2, m_3 ograniczeniach

dim $\mathbf{A_1}$ =[m_1 x n], dim $\mathbf{A_2}$ =[m_2 x n], A_3=[m_3*n]

Wektory b_1, b_2, b_3 odpowiadają za prawe strony ograniczeń

dim $\mathbf{b_1}$=m_1, dim $\mathbf{b_2}$=m_2, dim $\mathbf{b_3}$ = m_3

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

Polega na znalezieniu optymalnego rozwiązania, które jest akceptowalne z punktu widzenia każdego kryterium

- Z problemem optymalizacji wielokryterialnej mamy do czynienia wówczas, gdy mamy do czynienia jednocześnie z wieloma funkcjami celu
- Możliwe rozwiązania zadania optymalizacji można podzielić na dwie grupy:
  - rozwiązania zdominowane i
  - rozwiązania nie-zdominowane (optymalne w sensie Pareto).

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

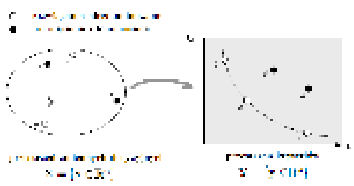
$$\min_{x \in X} F(x) = [f_1(x), \ldots, f_k(x)]^T$$

przy ograniczeniach $g_i(x) \le 0, \; i \in \{1, \ldots, m\}$

[illegible]

gdzie: k – liczba funkcji celu $f_i(x)$, $i=1,\ldots,k$

Front rozwiązań niezdominowanych



Literatura

- Stadnicki J., Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji z przykładami zastosowań technicznych, WNT, Warszawa, 2006.
- Kusiak J., Danielewska-Tułecka A., Oprocha P., Optymalizacja Wybrane metody z przykładami zastosowań, PWN, Warszawa, 2009.
- Cegielski A. Programowanie matematyczne, Wyd. Uniw. Zielonog. 2004
- Stachurski A., Wierzbicki A.P., Podstawy optymalizacji, PWN Warszawa 1999
- Findeisen S., Szymanowski W., Wierzbicki A., Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, 1987
- Michalewicz Z., Algorytmy genetyczne+struktury danych= programy ewolucyjne, WNT Warszawa, 1999
- Arabas J., Wykłady z algorytmów ewolucyjnych, WNT Warszawa, 2001
- Wierzchoń S.T., Sztuczne systemy immunologiczne, Teoria i zastosowania, EXIT Warszawa, 2002.