Programowanie liniowe całkowitoliczbowe
PCL **Metodologia podziału i ograniczeń – Branch and Bound Technique (B&B)**

$$\max \quad x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$
$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\quad \mathbf{x} \in Z^n$$

- **Podstawą metodologii B&B jest przegląd drzewa rozwiązań.**
- **Wykorzystuje się fakt skończoności zbioru możliwych wartości zmiennych całkowitoliczbowych w przypadku ograniczonych zadań PCL.**
- **Etapy metody: -podział**
  -gałęzienie
  -obliczanie górnych i dolnych oszacowań funkcji celu.

Metodologia podziału i ograniczeń – B&B

$$S_j = \{x | A^j x = b^j, x \geq 0 \text{ i } x \in Z^n\},$$

Osłabienie, które prowadzi do zadania PL:

$$\mathrm{T}_j = \{x | A^j x = b^j, x \geq 0\}$$
$$T_j \supseteq S_j$$

Metodologia podziału i ograniczeń – B&B

Podział. **Przyjmijmy, że zadanie PL zostało rozwiązane dla wierzchołka v_j, przy czym x (j) ma nie wszystkie składowe całkowitoliczbowe. Przykładowo niech pewna zmienna**

$$x_{Bi} = [y_{i0}] + f_{i0}, \quad 0 < f_{i0} < 1.$$

Podział S_j, który jest przy tym rozbiciem zbioru, jest następujący:

$$S_j^* = \{S_j \cap \{x | x_{Bi} \leq [y_{i0}]\}, S_j \cap \{x | x_{Bi} \geq < y_{i0} >\}\},$$

Gdzie <a> jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą a, [a] zaś oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą a.

Metodologia podziału i oszacowań – B&B

Skończoność. Załóżmy, że każda ze zmiennych x_j jest ograniczona i jej granica górna wynosi u_j. Niech

$$S_k = \{x | Ax = b, 0 \leq \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k \leq u_j, \text{ całkowite } j = 1,\dots,n\},$$
$$H_k = \{x | 0 \leq \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k \leq u_j, x_j \text{ całkowite } j = 1,\dots,n\}.$$

- ❑ **Zadanie PL jest pożądanym osłabieniem zadania PCL, gdyż dołączone ograniczenia dają górną i dolną granicę dla poszczególnych zmiennych.**
- ❑ **Zagadnienia PL przy założeniu ograniczoności zmiennych rozwiązuje się algorytmem dualnym sympleks.**

Metoda Branch and Bound

- Oparta na podejściu „podział i ograniczenie"
- Ogólna idea metody polega na wyborze zmiennej do podziału i rozwiązywaniu zadań PL
- Każdy podział zawęża zbiór rozwiązań dopuszczalnych

- Wartość optymalna funkcji celu LP jest *górnym ograniczeniem* optymalnej wartości funkcji celu PCL.
- Wartość funkcji celu PCL dla dowolnego rozwiązania całkowitoliczbowego jest *dolnym ograniczeniem* optymalnej wartości funkcji celu PCL.

PCL = LP + ograniczenia na całkowitoliczbowość zmiennych

Ograniczenia na zakres zmiennych

- Narzucenie indywidualnego zakresu dopuszczalnych wartości poszczególnym zmiennym nie spełniającym warunków całkowitoliczbowości

$$d_j \leq x_j \leq g_j$$

$$d_j \leq x_k \leq \left[x_k^0\right] \qquad \left[x_k^0\right] + 1 \leq x_k \leq g_k$$

Przyjmuje się, że:

$$d_j = 0 \qquad g_j = M$$

M - dostatecznie duża liczba całkowita

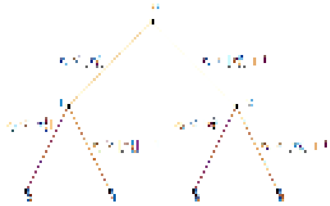
Ograniczenia na kolejne zmienne

- W sensie geometrycznym w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych zadania PL wycinane jest pasmo rozwiązań:

$$\left[x_k^0\right] < x_k < \left[x_k^0\right] + 1$$

co prowadzi do podziału tego zbioru na dwa podzbiory.

Graficzna reprezentacja przestrzeni rozwiązań za pomocą drzewa binarnego



1. Zasady usuwania zadań z listy zadań

- Zadanie PL jest sprzeczne
- Zadanie PL zostało już podzielone
- Istnieje zadanie spełniające warunek całkowitoliczbowości o większej wartości funkcji celu.

2. Zasady dzielenia zadania w przypadku problemu maksymalizacji

- Gdy nie jest spełniony warunek całkowitoliczbowości, ale zadanie PL ma największą wartość funkcji celu spośród zadań znajdujących się na liście.

Przykład zadania PCL

$$\max x_0 = 6x_1 + 5x_2$$

$$9x_1 + 7x_2 \le 63$$
$$x_1 + x_2 \le 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Rozwiązanie PL

		x_5	x_4
x_0	43,5	0,5	0,5
x_3	13,5	0,5	-1,5
x_2	4,5	-0,5	4,5
X_1	3,5	0,5	-3,5

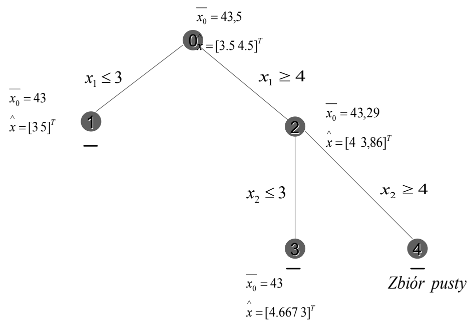
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = 43,5$$

Rozwiązanie PCL

		x_6	x_4
x_0	43	1	5
x_3	1	-2	-7
x_2	5	-1	1
X_1	3	1	0
X_5	13	1	2

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = 43$$

Drzewo rozwiązań



Przykład zadania PCL

$$\max x_0 = -7x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \quad = 8$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \quad - x_5 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Rozwiązanie PL

		$-x_1$	$-x_3$	$-x_5$
x_0	-14.2	2.2	0.6	0.4
x_2	3.8	0.2	1.6	-0.6
x_1	0.4	-0.4	-0.2	0.2

Rozwiązanie PCL

		$-x_1$	$-x_3$	$-x_5$
x_0	-15	2	1	3
x_2	5	3	1	-1
x_4	2	5	-1	-2

Przegląd pośredni
metodologia podziału i ograniczeń dla wektora binarnego

- **Żądanie binarności wektora x nie jest ograniczeniem zadania gdy jest znana skończona górna granica u_j dla składowej x_j**

$$dla\ x_j \in Z\ i\ 0 \le x_j \le u_j$$
$$x_j \in S_j = \{s_{1j}, ..., s_{pj}\}$$

Jest ono równoważne układowi ograniczeń:

$$x_j = \sum_{k=1}^{p} s_{kj}\delta_{kj}$$
$$\sum_{k=1}^{p} \delta_{kj} = 1\ dla\quad każdego\ j$$
$$\delta_{kj} = 0 \text{ lub } 1,\quad k = 1,2,..., p\ dla\ każdego\ j$$

Przegląd pośredni
metodologia podziału i ograniczeń dla wektora binarnego

Etapy metody:

- **podział – wybór pewnej zmiennej x_j i przyjęcie**

$$S_k^* = \{S_k \cap \{\mathbf{x}, x_j = 0\}, S_k \cap \{\mathbf{x}, x_j = 1\}\}$$

oraz

$$S_k^+ = \{j,\ j \in W_k\ i\ x_j = 1\}$$
$$S_k^- = \{j,\ j \in W_k\ i\ x_j = 0\}$$
$$F_k = \{j,\ j \notin W_k\ \}$$

Podział pośredni

- **oszacowania – wierzchołkowi v_k przyporządkowany jest problem:**

$$\max\ z_k = \sum_{j \in F_k} c_j x_j + \sum_{j \in S_k^+} c_j,$$
$$\sum_{j \in F_k} a_{ij} x_j \le b_i - \sum_{j \in S_k^+} a_{ij} = s_i,\qquad i = 1,...,m,$$
$$x_j = 0 \text{ lub } 1,\qquad j \in F_k.$$

Programowanie liniowe całkowitoliczbowe
metodologia odcięć

$$\max \mathrm{x}_0 = c^T x,$$
$$x \in S = \{x | Ax = b, x \ge 0 \text{ i } x \in Z^n\}. \qquad (1)$$

Załóżmy, że istnieją $\bar{A}$ oraz $\bar{b}$ takie, że:

$$T = \{x | Ax = b, \bar{A}x = \bar{b}, x \ge 0\}$$

$S \subseteq T$ **oraz zadanie osłabione w stosunku do zadania (1):**

$$\max \mathrm{x}_0 = c^T x,\quad x \in T$$

ma całkowitoliczbowe rozwiązanie optymalne x_{opt}. Wówczas x_{opt} jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1).

Metoda odcięć

(2)
$$\max \mathrm{x}_0 = c^T x,$$
$$x \in Q = \{x | Ax = b, x \ge 0\}.$$

Załóżmy, że mamy reprezentację problemu (2) w postaci

$$x_{B_i} = y_{i0} - \sum_{j \in R_N} y_{ij} x_j,\quad i = 0,1,...,m,$$

Podstawowe odcięcie

$$\sum_{j \in R_N} ([h]y_{ij} - [hy_{ij}])x_j \ge [h]y_{i0} - [hy_{i0}]$$

Odcięcia w metodzie form całkowitych

$$\sum_{j \in R_N} (y_{ij} - [y_{ij}])x_j \ge y_{i0} - [y_{i0}].$$
$$y_{ij} = [y_{ij}] + f_{ij}$$
$$\sum_{j \in R_N} f_{ij} x_j \ge f_{i0},$$
$$s = -f_{i0} + \sum_{j \in R_N} f_{ij} x_j,\quad s \ge 0.$$

s musi być liczbą całkowitą:

$$x_{Bi} = -(-f_{i0} + \sum_{j \in R_N} f_{ij} x_j) + ([y_{i0}] - \sum_{j \in R_N} [y_{ij}] x_j),$$

$[y_{i0}] - \sum_{j \in R_N} [y_{ij}] x_j$ **jest całkowite.**

Zadanie programowania liniowego PL dla zmiennych całkowitych

$$\max_{x \in X} \; x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2 \qquad X = \left\{ x: \begin{array}{c} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{array}, \begin{array}{c} x \ge 0 \\ x \in Z^n \end{array} \right\}$$

Rozwiązanie zadania PL dla $x \in R^n$ z dodanym odcięciem dla zmiennej s_1

		x_3	x_5
x_0	31/4	1/2	1/4
x_1	11/4	-1/2	1/4
x_2	9/4	3/2	-1/4
x_4	1/2	-2	1/2
s_1	-0,5	0	-0,5

Możliwe odcięcia:

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \ge \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \ge \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_5 \ge \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2}x_5 \ge \frac{1}{2}$$

Wybrane odcięcie: $-\frac{1}{2}x_5 + s_1 = -\frac{1}{2}$

Kolejne iteracje algorytmu odcięć metoda dualną simpleks

Tablica optymalna ale nie całkowitoliczbowa

		x_3	s_1
x_0	30/4	1/2	1/2
x_1	10/4	-1/2	1/2
x_2	10/4	3/2	-1/2
x_4	0	-2	1
x_5	1	0	-2

Dodano nowe odcięcie s_2

		x_3	s_1
x_0	30/4	1/2	1/2
x_1	10/4	-1/2	1/2
x_2	10/4	3/2	-1/2
x_4	0	-2	1
x_5	1	0	-2
s_2	-1/2	-1/2	-1/2

		s_2	s_1
x_0	7	1	0
x_1	3	-1	1
x_2	1	3	-2
x_4	2	-4	3
x_5	1	0	-2
x_3	1	-2	1

Rozwiązanie dopuszczalne, optymalne i całkowitoliczbowe

$x=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,s_1,s_2]$ =[3,1,1,2,1,0,0]

x_0=7

Heurystyczne reguły wyboru wiersza źródłowego

- **Należy zbudować odcięcie „jak najgłębsze", tzn. usuwające największy możliwy obszar nie zawierający punktów całkowitoliczbowych.**
- **Odcięcie staje się „głębsze", jeśli**

$$f_{ij} \downarrow \quad a \quad f_{i0} \uparrow$$

- **Pożądane jest aby f_{i0} było możliwie duże a**

  f_{ij} było możliwie małe dla $j \in R_N$

Reguły wyboru wiersza w metodzie form całkowitych

(I) $$f_{r0} = \max_i f_{i0}$$

(II) $$\frac{f_{r0}}{\sum_{j \in R_N} f_{rj}} = \max_i \frac{f_{i0}}{\sum_{j \in R_N} f_{ij}}$$

(III) $$\frac{f_{r0}}{f_{rk}} = \max_i \frac{f_{i0}}{f_{ik}}$$

Dla określonego $k \in R_N$

Badanie całkowitoliczbowości rozwiązania PCL

W obliczeniach komputerowych liczba rzeczywista r jest traktowana jako liczba całkowita, jeśli

$$\min \{1 - f_r, f_r\} \le \varepsilon$$

Nierozpoznanie całkowitoliczbowości może powodować:

- **wykonanie niepotrzebnych iteracji,**
- **dołączenie niepoprawnych odcięć**
- **utratę rozwiązania optymalnego.**

I na odwrót – błędne stwierdzenie całkowitoliczbowości może spowodować niepoprawne zakończenie obliczeń.

Optymalne rozwiązanie zadania PCL

Rozwiązanie dopuszczalne x zadania PCL jest jego rozwiązaniem optymalnym, gdy są spełnione trzy warunki:

(i) **prymarna dopuszczalność,** $y_{i0} \ge 0, \; i = 1,\dots,m;$

(ii) **całkowitoliczbowość,** y_{i0} **całkowite,** $i = 1,\dots,m;$

(iii) **dualna dopuszczalność,** $y_{0j} \ge 0$ **dla wszystkich** $j \in R_N$

Przegląd algorytmów metodologii odcięć

1. **Metoda form całkowitych- nie spełniony warunek całkowitoliczbowości y_{i0} dla $i=1,\ldots,m$**
2. **Całkowitoliczbowy algorytm dualny – nie spełniony warunek prymalnej dopuszczalności:**

$$y_{i0} \geq 0 \; dla \quad i = 1,\ldots,m$$

3. **Całkowitoliczbowy algorytm prymalny – nie spełniony warunek dualnej dopuszczalności:**

$$y_{0j} \geq 0 \, dla \quad \forall j \in \mathbf{R}_N$$

Algorytm odcięć dla zadania PCL

Krok 1

Znajdź rozwiązanie spełniające dwa spośród trzech wymienionych warunków. Idź do Kroku 2.

Krok 2 **- Test na optymalność**

Jeśli trzeci warunek jest spełniony – Stop. W przeciwnym wypadku idź do Kroku 3.

Krok 3 **- Odcinanie i eliminacja**

Dodaj odcięcie z odpowiednio dobraną wartością h. Dokonaj eliminacji – aby zachować dwa wybrane warunki. Może zaistnieć konieczność wykonania większej liczby kroków eliminacji. Wróć do Kroku 2.

Czy procedura rozwiązania zadania PCL dla zmiennych rzeczywistych a później zaokrąglenie wyników do wartości całkowitych – jest prawidłowa ??

Rozwiązanie zadania PCL

Wektor rozwiązań	Wartość x_0	Przybliżenie całkowite	Wartość x0
[3.5;4.5]	43.5		
		[4,5]	Zadanie sprzeczne
		[3,4]	38
Zadanie PCL			
[[3,5]	43		