III Zadanie programowania liniowego PL

$$\max \; f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

*dim* $\mathbf{x}$*=[n*1], dim* $\mathbf{c}$*=[n*1]*

Macierze $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ odpowiadają za współczynniki w $m_1$ *i* $m_2$ ograniczeniach

*dim* $A_1 = [m_1 * n]$, *dim* $A_2 = [m_2 * n]$

Wektory $b_1$, $b_2$ odpowiadają za prawe strony ograniczeń

*dim* $b_1 = [m_1 * 1]$, *dim* $b_2 = [m_2 * 1]$



Zadanie programowania liniowego dla ograniczeń mniejszościowych i większościowych

**Metoda dwóch faz**

**I faza - należy znaleźć pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne poprzez rozwiązanie zadania pomocniczego**

**II faza - maksymalizacja funkcji celu $x_0$ dla następnego rozwiązania bazowego dopuszczalnego wg algorytmu simpleks.**

**Algorytm simpleks (prymalny) – I faza Krok 1 – nie ma możliwości stworzenia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego**

***Krok 1. (start).*** **Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Należy sprawdzić dopuszczalność rozwiązania: czy** $y_{i0} \ge 0 \; dla \; i = 1,\ldots,m$ **Tak - idź do Kroku 2, Nie – STOP.**



I faza metody PL – Nieznane pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne

I.1 - technika zadania pomocniczego
I.2 - technika pomocniczej funkcji celu

**Ad. I.1 Rozwiązanie zadania pomocniczego PL z funkcją celu w postaci funkcji liniowej $z_0$**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_t \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

**Gdzie $I_t$ jest macierzą jednostkową rzędu t.**

$$\mathbf{A_1 x_N} + \mathbf{I_t x_t} = \mathbf{b_1}$$
$$\mathbf{A_2 x_N} \qquad\quad = \mathbf{b_2}$$



I faza metody PL cd.

**Wprowadzamy wektor zmiennych pomocniczych** $x_\alpha$ **dim** $\mathbf{x}_\alpha$ **= m- t**

$$\mathbf{A_1 x_N} + \mathbf{I_t x_t} \qquad = \mathbf{b_1}$$
$$\mathbf{A_2 x_N} + \qquad \mathbf{I_{m-t} x_\alpha} = \mathbf{b}_2$$

**Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań:**

$$x_t = b_1, \; x_\alpha = b_2, \; x_N = 0$$

**Należy znaleźć inne rozwiązanie bazowe dopuszczalne, w którym** $x_\alpha = 0$ **lub stwierdzić, że takie rozwiązanie nie istnieje.**



**I faza metody – zadanie pomocnicze PL**

$$\max z_0 = \qquad\qquad\qquad - \mathbf{1x}_\alpha,$$

$$\mathbf{x_0} - \mathbf{c_N x_N} - \mathbf{c_t x_t} \qquad = 0,$$
$$\mathbf{A_1 x_N} + \mathbf{I_t x_t} \qquad = \mathbf{b_1},$$
$$\mathbf{A_2 x_N} + \quad \mathbf{I_{m-t} x_\alpha} = \mathbf{b_2},$$

$$x_N, x_t, x_\alpha \ge 0$$

Zmienna $x_0$ zawsze pozostaje zmienną bazową. Rozwiązaniem początkowym zadania PL I fazy jest

$$\mathbf{x_t} = \mathbf{b_1} - \mathbf{A_1 x_N}, \mathbf{x_\alpha} = \mathbf{b_2} - \mathbf{A_2 x_N},$$
$$\mathbf{z_0} = \mathbf{1}(\mathbf{b_2} - \mathbf{A_2 x_N}),$$
$$\mathbf{x_0} = \mathbf{c_t b_1} + (\mathbf{c_N} - \mathbf{c_t A_1})\mathbf{x_N}$$

Oraz

$$\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$$



**Ad.I.2 Pomocnicza funkcja celu**
**Uproszczona wersja I fazy metoda dwufazowej simpleks – uzyskanie bazowego rozwiązania dopuszczalnego**

•Jeśli wektor b w początkowej tablicy simpleksowej ma przynajmniej jedną ujemną współrzędną, to tablica przedstawia niedopuszczalne rozwiązanie bazowe.

•Początkową niedopuszczalną tablicę simpleksową można przekształcić wykorzystując algorytm simpleks.

•Cel – uzyskanie nieujemnych wartości zmiennych pomocniczych.

•Należy znaleźć najmniejszą wartość $s \Rightarrow \min_i \{y_{i0}, \; y_{i0} < 0 \; dla \; i = 1,2,\ldots,m\}$

•Wybrany wiersz s będzie stanowił pomocniczą funkcję celu , którą należy zmaksymalizować.

•Kolejne kroki metody simpleks powinny być prowadzone do uzyskania dopuszczalnej tablicy simpleks, tzn. takiej dla której spełniony jest warunek prymalnej dopuszczalności:

$$y_{i0} \ge 0 \; dla \; i = 1,2,\ldots,m$$

•Koniec I fazy

## Ad.I.2 Pomocnicza funkcja celu
## Uproszczona wersja I fazy metoda dwufazowej simpleks cd.

***Krok 1.*** *(start- wybór pomocniczej funkcji celu).* Rozpoczynamy algorytm od znalezienia wiersza s , dla którego $y_{s0} < 0$ oraz $s = \min_i \{y_{i0} : y_{i0} < 0, i = 1,2,...,m\}$

Jeśli brak takiego *s* ( $y_{i0} \geq 0 \; dla \; i = 1,2,...,m$ ) to tablica odpowiada dopuszczalnemu rozwiązaniu bazowemu – należy przejść do II fazy.

***Krok 2.*** *(Wybór zmiennej wchodzącej do bazy).* Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną $x_k \in R_N$ dla której $y_{sk} < 0$

Typową regułą jest wybór zmiennej $x_k , k \in R_N$ , dla której:

$$y_{0k} = \min_{j \in R_N} \{y_{sk} : y_{sk} < 0\}$$

Jeśli jest brak takiej zmiennej $x_k$ ( $y_{sk} \geq 0 \; dla \; k \in R_N$ ) to jest brak rozwiązania dopuszczalnego. Jest to problem sprzeczny.

Idź do **Kroku 3.**



**Krok 3**. (wybór zmiennej usuwanej z bazy). Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną $x_{Br}$ ,dla której

$$\frac{y_{r0}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{y_{io}}{y_{ik}} : \; i = 1,...,m, \frac{y_{i0}}{y_{ik}} > 0 \right\}$$

Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich. Taki przypadek zawsze istnieje, ponieważ $y_{s0} < 0 \; i \; y_{sk} < 0$ . Do wyboru zmiennej można nie wybierać wiersza pomocniczej funkcji celu.

Idź do **Kroku 5**.

**Krok 4.** (eliminacja Gauss'a). Wyznacz $x_k$ oraz $x_{Bi} , i \neq R_N$ , względem zmiennych $x_j , j \in R_N - \{k\}$ oraz zmiennej $x_{B_r}$ zgodnie z wyprowadzonymi wzorami.

Podstaw $x_j = 0, j \in R_N - \{k\} \; \mathrm{i} \; x_{Br} = 0$

aby otrzymać pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

Idź do **Kroku 1**.

Krok ten czasami nazywa się wymianą zmiennej bazowej ( piwotyzacją).



## Przykład III zadania programowania liniowego
## metoda dwufazowa simpleks

$$\max_{x \in X} x_0 = 1x_1 + 6x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{rcccc} +2x_1 & + & 1x_2 & \geq & 2 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 3 \\ +1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 6 \end{array} , x \geq 0 \right\}$$

**I faza**

| | | $-x_1$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 0 | -1 | -6 |
| $x_3$ | -2 | -2 | -1 |
| $x_4$ | 3 | -1 | 1 |
| $x_5$ | 6 | 1 | 1 |

**Brak rozwiązania dopuszczalnego**

**II faza cz.1**

| | | $-x_5$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 6 | 1 | -5 |
| $x_3$ | 10 | 2 | 1 |
| $x_4$ | 9 | 1 | 2 |
| $x_1$ | 6 | 1 | 1 |

**I rozwiązanie bazowe dopuszczalne**

$$x_{B_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0^{B_1} = 6$$

**II faza cz.2**

| | | $-x_5$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 28,5 | 3,5 | 2,5 |
| $X_3$ | 5,5 | 1,5 | -0,5 |
| $X_2$ | 4,5 | 0,5 | 0,5 |
| $X_1$ | 1,5 | 0,5 | -0,5 |

**II rozwiązanie bazowe dopuszczalne- rozwiązanie optymalne**

$$x_{B_1} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}, \quad x_0^{B_2} = 28,5$$

Rozwiązanie optymalne: $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & \hat{x}^3 & \hat{x}^4 & \hat{x}^5 \end{bmatrix}^T == [1,5 \quad 4,5 \quad 5,5 \quad 0 \quad 0]^T$ $\quad \hat{x}_0 = 28,5$



## Przypadki szczególne – zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem pustym - brak rozwiązania

$$X = \phi$$

W metodzie dwufazowej simpleks algorytm w I fazie obliczeń nie potrafi stworzyć pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego z powodu braku rozwiązań dopuszczalnych.

**Przykład:**

$$\max_{x \in X} x_0 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - x_2 - x_3$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_2 - x_3 \leq 2 \end{array} , x \geq 0 \right\}$$

| | | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 0 | -1/2 | 1 | 1 |
| $x_4$ | 2 | -1/2 | 2 | 1 |
| $x_5$ | -3 | 1/2 | -2 | 1 |
| $x_6$ | 2 | 0 | 1 | -1 |

| | | $-x_1$ | $-x_4$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | x | x | x | x |
| $x_2$ | x | x | x | x |
| $x_5$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $x_6$ | x | x | x | x |

Nie jest spełniony warunek dopuszczalności drugiej tablicy simpleks i jednocześnie druga tablica wskazuje, że jest brak rozwiązań dopuszczalnych.

$$x_5 = -x_4 - 2x_3 - 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



II Zadanie programowania liniowego PL

$$\min \; x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A\,x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

*dim* $\mathbf{x}$*=[n*1], dim* $\mathbf{c}$*=[n*1]*

Macierz $A$ odpowiada za współczynniki w m ograniczeniach

*dim* $A$*=[m x n]*

Wektor wyrazów wolnych $\boldsymbol{b}$ odpowiada za prawą stronę ograniczeń

*dim* $\boldsymbol{b}$ *=[m*1]*



## Postać kanoniczna II zadania PL

$$\min \; x_0 = c^{\mathbf{T}} x,$$
$$\mathbf{A} x \geq b,$$
$$x \geq \mathbf{0},$$

$$\max \; -x_0 = -c^{\mathbf{T}} x,$$
$$-\mathbf{A} \; x \; + I_s x_s = -b,$$
$$x \; , x_s \geq \mathbf{0},$$

## Optymalne rozwiązanie II zadania PL metodą dualną simpleks

**Twierdzenie:**

**Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań Ax=b**

**jest rozwiązaniem optymalnym II zadania PL, jeśli są spełnione warunki:**

**(i) Warunek dualnej dopuszczalności:**

$$y_{oj} \geq 0 \quad dla \quad j \in R_N$$

**(ii) Warunek dualnej optymalności**

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \quad i \in \{1,\dots,m\}$$



## Algorytm dualny simpleks

***Krok 1.*** ***(start).*** **Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszej tablicy dualnie dopuszczalnej. Należy sprawdzić dualną dopuszczalność rozwiązania: czy** $y_{oj} \geq 0 \; dla \; j \in R_N$ **Tak - idź do Kroku 2, Nie – koniec.**

***Krok 2.*** ***(test optymalności).*** **Czy** $y_{i0} \geq 0$ **dla każdego** $i = 1,\dots,m$ **?**

- **Tak - to aktualne rozwiązanie jest optymalne.**
- **Nie - idź do Kroku 3.**

***Krok 3.*** ***(Wybór zmiennej usuwanej z bazy).*** **Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną** $x_{B_r}$ **dla której** $y_{r0} < 0$.

**Typową regułą jest wybór zmiennej** $x_{B_r}$ **dla której:**

$$y_{r0} = \min_{j \in R_N} \{ y_{io}, \; y_{i0} < 0, \; i = 1,\dots, m \}$$

**Idź do Kroku 4.**



## Algorytm dualny simpleks c.d.

**Krok 4. (wybór zmiennej wprowadzanej do bazy). Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną** $x_k$ **dla której**

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max\left(\frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} < 0\right).$$

**Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich.**

**Idź do Kroku 5.**

***Krok 5. (eliminacja).*** **Dokonaj dualną iterację simpleksową metodą eliminacji Gauss'a poprzez wprowadzenie** $x_k$ **do bazy oraz usunięcie** $x_{B_r}$

**Idź do Kroku 2.**



## Przykład II zadania programowania liniowego – dualna metoda simpleks

$$\min_{x \in X} x_0 = 1\mathbf{x}_1 + 1x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{ccccc} +1x_1 & + & 2x_2 & \geq & 8 \\ 2x_1 & + & 1x_2 & \geq & 6, x \geq 0 \\ +1x_1 & + & 1x_2 & \geq & 5 \end{array} \right\}$$

**tablica początkowa**

| | | $-x_1$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $-x_0$ | 0 | 1 | 1 |
| $X_3$ | -8 | -1 | -2 |
| $X_4$ | -6 | -2 | -1 |
| $X_5$ | -5 | -1 | -1 |

**tablica dualnie dopuszczalna**

$$y_{oj} \geq 0 \; dla \; j \in R_N$$

**tablica pośrednia**

| | | $-x_1$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| $-x_0$ | -4 | ½ | ½ |
| $X_2$ | 4 | ½ | -1/2 |
| $x_4$ | -2 | -3/2 | -1/2 |
| $X_5$ | -1 | -1/2 | -1/2 |

**tablica jeszcze nie optymalna**

$$y_{20} < 0$$

**tablica pośrednia**

| | | $-x_4$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| $-X_0$ | -14/3 | 1/3 | 1/3 |
| $X_2$ | 10/3 | 1/3 | -2/3 |
| $X_1$ | 4/3 | -2/3 | 1/3 |
| $X_5$ | -1/3 | -1/3 | -1/3 |

**tablica jeszcze nie optymalna**

$$y_{30} < 0$$



## Przykład II zadania programowania liniowego – dualna metoda simpleks cd.

**tablica optymalna I**

| | | $-x_5$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| $-X_0$ | -5 | 1 | 0 |
| $X_2$ | 3 | 1 | -1 |
| $X_1$ | 2 | -2 | 1 |
| $X_4$ | 1 | -3 | 1 |

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \; \forall i = 1,\dots,m$$

**tablica optymalna II**

| | | $-x_5$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $-x_0$ | -5 | 1 | 0 |
| $X_2$ | 4 | -2 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | -1 |
| $X_3$ | 1 | -3 | 1 |

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \; \forall i = 1,\dots,m$$

Rozwiązanie optymalne I wierzchołek: $\hat{x}^1 = [x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1] = [2, 3, 0, 1, 0]$

Rozwiązanie optymalne II wierzchołek: $\hat{x}^2 = [x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2] = [1, 4, 1, 0, 0]$

$$\hat{x}_0 = 5$$

Zbiór rozwiązań optymalnych: $\hat{x} = \{x : x = [1+\lambda, 4-\lambda]^T, \quad \lambda \in [0,1]\}.$



## Teoria dualności dla zadania programowania liniowego PL

$$\max x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\min v_0 = v^T b$$
$$A^T v \geq c$$
$$v \geq 0$$

**Twierdzenie 7.1 :**

**Jeśli wektor *x* jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla zadania prymalnego i wektor v jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla zadania dualnego, to wartość funkcji celu w zadaniu dualnym nie może być mniejsza od wartości funkcji celu w zadaniu prymalnym.**

$$v^T b \geq c^T x$$

## Teoria dualności dla zadania PL cd.

**Twierdzenie 7.2**

**Dla pary rozwiązań optymalnych $\hat{x}$ i $\hat{v}$ zadania prymalnego i dualnego PL zachodzi warunek:**

$$c^T \hat{x} = b^T \hat{v}$$

**Twierdzenie 7.3**

**Niech ($x_r$ ,$x_s$ ) i ( $v_r$ , $v_s$) będą odpowiednio rozwiązaniami dopuszczalnymi zadania prymalnego i dualnego, przy czym $x_s$ i $v_s$ są wektorami zmiennych dopełniających do postaci kanonicznej zadania w wektorach rozwiązań.**

**Wtedy** $(\hat{x}_r, \hat{x}_s)$ $i$ $(\hat{v}_s, \hat{v}_r)$ **będą odpowiednio rozwiązaniami optymalnymi pary zadań prymalnego i dualnego, jeśli zachodzi warunek komplementarności zmiennych:**

$$\hat{x}^T \hat{v} = 0 \qquad \text{tzn.} \qquad \hat{x}_r^T \hat{v}_s + \hat{x}_s^T \hat{v}_r = 0$$



**Twierdzenie 7.4**

Jeśli jedno z pary wzajemnie dualnych zadań programowania liniowego ma rozwiązanie optymalne, to ma je również zadanie dualne i obydwa zadania mają identyczne wartości funkcji celu.

**Twierdzenie 7.5**

Jeśli zadanie dualne jest nieograniczone, to zadanie prymalne jest sprzeczne.

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

**Przykład I** zadanie prymalne

$$\min_{v\in V} v_0 = 5v_1 + 0v_2 + 21v_3$$

$$V = \left\{ x : \begin{array}{c} v_1 - v_2 + 6v_3 \ge 2 \\ v_1 + v_2 + 2v_3 \ge 1 \\ v_1, v_2, v_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

**zadanie dualne**

$$\max_{x\in X} x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{c} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{array} , x \ge 0 \right\}$$

Postać wektora rozwiązań:

$$v = [v_r, v_s] = [v_1, v_2, v_3 / v_4, v_5] \qquad x = [x_r, x_s] = [x_1, x_2 / x_3, x_4, x_5]$$

$$x^T v = 0 \Rightarrow \quad [x_r, x_s]^T [v_s, v_r] = 0$$

**Przykład II System cięcia dłużyc**

$$\min v_0 = 0.3v_1 + 0.6v_2 + 0.2v_3$$

$$\begin{array}{l} 7v_1 + 3\ v_2 + 0v_3 \ge 2100 \\ 0v_1 + 1v_2 + 2v_3 \ge 1200 \\ v_1, v_2, v_3 \ge 0 \end{array}$$

$$\max_{x\in X} x_0 = 2100\mathbf{x}_1 + 1200x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{array}{c} 7x_1 + 0x_2 \le 0.3 \\ 3x_1 + 1x_2 \le 0.6 \\ 0x_1 + 2x_2 \le 0.2 \end{array} , x \ge 0 \right\}$$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

## Teoria dualności dla zadania PL cd.

**I. Rozwiązanie zadania dualnego metodą simpleks**

**Zadanie dualne:**

$$\max_{x\in X} x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2 \qquad X = \left\{ x : \begin{array}{c} 1x_1 + 1x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{array} , x \ge 0 \right\}$$

| | | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 0 | -2 | -1 |
| $x_3$ | 5 | 1 | 1 |
| $x_4$ | 0 | -1 | 1 |
| $x_5$ | 21 | 6 | 2 |

| | | $x_5$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 7 | 1/3 | -1/3 |
| $x_3$ | 3/2 | -1/6 | 2/3 |
| $x_4$ | 7/2 | 1/6 | 4/3 |
| $x_1$ | 7/2 | 1/6 | 1/3 |

| | | $x_5$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 31/4 | 1/4 | 1/2 |
| $x_2$ | 9/4 | -1/4 | 3/2 |
| $x_4$ | 1/2 | 1/2 | -2 |
| $x_1$ | 11/4 | 1/4 | -1/2 |

Rozwiązanie optymalne:

a) Zadanie dualne $\hat{x} = [x_1, x_2, \uparrow x_3, x_4, x_5]$ $\hat{x} = \left[\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, \uparrow 0, \frac{1}{2}, 0\right]$

b) Zadanie prymalne $\hat{v} = [v_4, v_5, \uparrow v_1, v_2, v_3]$ $\hat{v} = \left[0,\ 0, \uparrow \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right]$

Wartość optymalna funkcji celu: $\hat{x}_0 = \hat{v}_0 = \frac{31}{4}$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka