

TEORIA I METODY OPTIMALIZACJI

Zadanie programowania liniowego część I

Wydział Elektroniki
Kier. Automatyka i Robotyka
Studia magisterskie
dr inż. Ewa Szlachcic
Katedra Automatyki, Mechatroniki i Systemów Sterowania
Politechnika Wroclawska

Zadanie programowania liniowego PL dla ograniczeń mniejszościowych

$$\max_{x \in X} f(x) = c^T x$$

przy ograniczeniach:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$\dim x = n, \dim c = n, \dim A = [m \times n], \dim b_1 = m_1,$$

Postać kanoniczna zadania PL

$$\max_{x \in X} x_0 = c^T x$$

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Równoważność zadań programowania matematycznego

I Ograniczenie równościowe można zastąpić dwoma ograniczeniami nierównościowymi

$$g_i(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \\ g_i(x) \geq 0 \Rightarrow -g_i(x) \end{cases}$$

II Ograniczenie nierównościowe można zastąpić ograniczeniem równościowym, wprowadzając zmienną uzupełniającą

$$g_i(x) \pm x_{n+i} = 0$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

III Zmienną wolną można przedstawić jako różnicę dwóch zmiennych nieujemnych

$$x_i \in R$$

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

$$\text{gdzie: } x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Przykład zadania programowania liniowego

$$\max_{x \in X} x_0 = 2x_1 + 1x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0, x \geq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \end{cases} \right\}$$

- Liczba zmiennych $n=2$,
- Liczba ograniczeń $m=3$.

Postać kanoniczna zadania PL – wprowadzenie zmiennych uzupełniających dla układu m równań liniowych.

$$\max_{x \in X} x_0 = 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$X = \left\{ x : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 0 + 0 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 0 + x_4 + 0 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 0 + 0 + x_5 = 21 \end{cases} \right\}$$

Kolumny odpowiadające jednostkowej macierzy bazowej B

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Postać kanoniczna macierzowa zadania PL

$$\max_{x \in X} x_0 = 2x_1 + 1x_2$$

$$X = \left\{ x : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0, x \geq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \end{cases} \right\}$$

- Liczba zmiennych $n=5$,
- Liczba ograniczeń $m=3$.

$$\max_{x \in X} x_0 = c^T x \quad x^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \quad c^T = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]^T = [2, 1, 0, 0, 0]$$

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq 0$$

Kolumny odpowiadające jednostkowej macierzy bazowej B – kolumny dla zmiennych x_3, x_4, x_5

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Podstawowe definicje

Jeśli dla układu równań liniowych $Ax=b$ spełniony jest warunek $\text{rz}[A]=\text{rz}[A]$ to mogą zaistnieć trzy następujące przypadki:

1. $\text{rz}[A] = m = n$ istnieje jedno rozwiązanie układu $Ax=b$.
2. $\text{rz}[A] = n < m$ istnieje jedno rozwiązanie układu równań, lecz przy tym $(m - n)$ równań jest zbędnych.
3. $\text{rz}[A] = m < n$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu $Ax=b$, jest to układ nieoznaczony.

Definicja 4.1 macierzy bazowej B

Macierzą bazową B układu równań $Ax = b$ $\text{rz}[A] = m, n > m$ nazywamy nieosobliwą macierz kwadratową o wymiarach $(m \times m)$ utworzoną z liniowo-niezależnych kolumn a macierzy A .

Definicja 4.2 rozwiązania bazowego

Rozwiązaniem bazowym układu równań $Ax=b$ $\text{rz}[A]=m, n>m$ nazywamy wektor $x_b=B^{-1}b$ utworzony ze zmiennych odpowiadających kolumnom a macierzy bazowej B .

Składowe wektora bazowego x_b są to zmienne bazowe.

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Rozwiązania bazowe

$A = [B, N]$ B- macierz bazowa nieosobliwa $\det B \neq 0, \dim B = m$
 N- macierz niebazowa

$x = [x_B, x_N]$ x_B - wektor zmiennych bazowych odpowiadających kolumnom macierz B
 x_N - wektor zmiennych niebazowych odpowiadających kolumnom macierz N

Definicja 4.3

Rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym zadania programowania liniowego PL

jeśli wektor x_B jest nieujemny tzn. $x_B \geq 0$

Wówczas rozwiązanie bazowe dopuszczalne posiada nie więcej niż m dodatnich x_i

$$x = [x_B, 0] \quad x_B = B^{-1}b \quad x_N = 0$$

Definicja 4.4

Niezdgenerowanym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym zadania PL nazywamy rozwiązanie dopuszczalne, w którym nie wszystkie składowe x_i są większe od zera.

Pierwsze rozwiązanie bazowe

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$x_0 = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N) x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$

Poszukiwanie rozwiązań bazowych dopuszczalnych

Pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$x_0 = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N) x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$

Wprowadzone oznaczenia:

$$y_0 \equiv \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad y_j \equiv \begin{bmatrix} c_B B^{-1}a_j - c_j \\ B^{-1}a_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_j, j \in R_N$ oznaczają kolumny macierzy N.

Funkcja celu x_0

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

M funkcji ograniczeń

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_N} y_{ij} x_j, \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

Postać początkowej tablicy simpleksowej

		$-x_N$			$-x_N$
x_0	$c_B B^{-1}b$	$c_B B^{-1}N - c_N$	$\xrightarrow{c_B=0}$	x_0	0
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$		x_B	b
					N

dla przypadku gdy $c_B=0$ tzn. pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne odpowiada za punkt wierzchołkowy x w postaci:

$$x_N = [0, \dots, 0]$$

Zadanie programowania liniowego PL dla ograniczeń mniejszościowych
Założenia:

- Zbiór X rozwiązań dopuszczalnych $X \neq \emptyset$
- algorytm simpleks startuje z bazowego dopuszczalnego rozwiązania oraz w trakcie jego realizacji nie występuje degeneracja

I. Zadanie programowania liniowego PL posiada jedno rozwiązanie

$$\max_{x_1, x_2} x_0 = 2x_1 + 1x_2 \quad X = \left\{ x: \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0, x \geq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \end{array} \right\}$$

Początkowa tablica simpleksowa

		x_1	x_2
x_0	0	-2	-1
x_1	5	1	1
x_2	0	-1	1
x_3	21	6	2

Rozwiązanie bazowe początkowe: $\hat{x} = [x_B, x_N]$

Wartość początkowa funkcji celu: $\hat{x} = [x_3, x_1, x_2, x_1, x_2]^T = [5, 0, 21, 0, 0]^T$

$$x_0 = 2x_1 + x_2 \quad \text{tzn. } x_0 = 0.$$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Polepszanie rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R_N} y_{0j} x_j$$

zawsze $x_j \geq 0$,

zatem gdy $x_k \uparrow$ to również $x_0 \uparrow$ gdy $y_{0k} \leq 0$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R_N} y_{ij} x_j, \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Pierwsza tablica simpleks-I rozwiązanie bazowe dopuszczalne

		...	$-x_j$...	$-x_k$...
x_0	y_{00}	...	y_{0j}	...	y_{0k}	...
	
x_{Bi}	y_{i0}	...	y_{ij}	...	y_{ik}	...
	
x_{Br}	y_{r0}	...	y_{rj}	...	y_{rk}	...
	
x_{Bm}	y_{m0}	...	y_{mj}	...	y_{mk}	...

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka