Właściwe minimum lokalne:

Funkcja f(x) ma w punkcie $\hat{x}$ **właściwe minimum lokalne, jeżeli istnieje** $\delta > 0$
takie, że: $\forall x \in E$

$$f(\hat{x}) < f(x)$$

przy czym: $E = X \cap \Delta$

$$\Delta = \{x : 0 < \|\hat{x} - x\| < \delta\}$$

Słabe minimum lokalne

Funkcja f(x) ma w punkcie $\hat{x}$ **słabe minimum lokalne, jeżeli istnieje** $\delta_l > 0$
takie, że $\forall x \in E_l$

$$f(\hat{x}) \le f(\hat{x}_l)$$

przy czym:

$$E_l = X \cap \Delta_l$$

$$\Delta_l = \{x : 0 < \|\hat{x} - x\| < \delta_l\}$$

Każde minimum globalne jest minimum lokalnym, lecz nie na odwrót.

- Zadanie optymalizacji bez ograniczeń dla $X = R^n$

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

- Zadanie optymalizacji z ograniczeniami:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

❖ Zadanie programowania liniowego - ZPL

❖ Zadanie programowania nieliniowego - ZPN

Twierdzenie Weierstrass'a

Funkcja f(x) ciągła na zwartym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych [zbiorze ograniczonym i domkniętym]

jest na tym zbiorze ograniczona i osiąga swe kresy tzn.: istnieją punkty $x_1, x_2 \in X$

takie, że dla każdego $x \in X$ **zachodzi:**

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

Własności funkcji wypukłych

Definicja zbioru wypukłego:

Zbiór $X \subset R^n$ **nazywamy wypukłym, jeżeli dla każdych dwóch punktów** $x^1, x^2 \in X$ **odcinek łączący te dwa punkty także należy do zbioru X tzn.:**

$$X = \{x : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, 0 \le \lambda \le 1\}$$

Definicja funkcji wypukłej:

Niech $X \subset R^n$ **będzie zbiorem wypukłym. Funkcję** $f : X \to R^1$ **będziemy nazywali wypukłą, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów** $x^1, x^2 \in X$ **i dla każdego:** $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$

Własności funkcji wypukłych

Definicja funkcji ściśle-wypukłej:

Niech $X \subset R^n$ **będzie zbiorem wypukłym. Funkcję** $f : X \to R^1$ **będziemy nazywali ściśle-wypukłą, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów** $x^1, x^2 \in X$ **i dla każdego:** $\lambda \in [0,1]$

zachodzi: $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$

Definicja funkcji wklęsłej:

Niech $X \subset R^n$ **będzie zbiorem wypukłym. Funkcję** $f : X \to R^1$ **będziemy nazywali wklęsłą, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów** $x^1, x^2 \in X$ **i dla każdego:** $\lambda \in [0,1]$

zachodzi: $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \ge \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$

Wniosek 1

- Funkcja F(x) jest wklęsła wtedy i tylko wtedy gdy – F(x) jest wypukła.

Wniosek 2

- Poszukiwanie minimum funkcji można zastąpić poszukiwaniem jej maksimum i na odwrót.
- Zachodzi wówczas:

$$\min\ F(x) = -\max\ (-F(x))$$
$$\arg\min\ F(x) = \arg\max\ (-F(x))$$

Własności różniczkowe funkcji

Jeżeli w punkcie x^0 *istnieje wektor, który oznaczymy* $\nabla f(x^0)$, *taki, że:*

dla dowolnego punktu $x \in X$

$$f(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)^T (x - x^0) + o_1(x^0, x)$$

gdzie: $\lim_{x \to x^0} \frac{o_1(x^0, x)}{\|x - x^0\|} = 0$

Funkcja f(x) jest różniczkowalna w punkcie x^0, *a wektor* $\nabla f(x^0)$ *jest gradientem funkcji f(x) .*

Jeżeli w punkcie x^0 *funkcja f(x) jest różniczkowalna oraz istnieje symetryczna macierz kwadratowa n*n* $\nabla^2 f(x^0)$ *taka, że: dla dowolnego punktu x* $x \in X$

dla dowolnego punktu

$$f(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)^T (x - x^0) + 1/2(x - x^0)^T \nabla^2 f(x^0)(x - x^0) + o_2(x^0, x)$$

gdzie: $\lim_{x \to x^0} \frac{o_2(x^0, x)}{\|x - x^0\|^2} = 0$ $\quad \nabla^2 f(x^0)$ - hesjan funkcji *f(x⁰)*

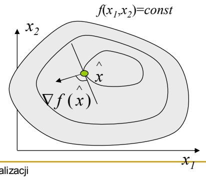
Wówczas funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x^0.

Hesjan funkcji *f(x)*

$$\nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f(x) = A = H$$

Forma kwadratowa $\quad f(x) = 1/2 x^T A x + b^T x + c$

Dla macierzy symetrycznej A – zachodzi: $\nabla^2 f(x) = A$



Kiedy funkcja f(x) jest wypukła

Macierz A o wymiarze nxn nazywamy hesjanem, gdy jej elementami są drugie pochodne cząstkowe funkcji f(x):

$$A(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad dla\ i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Lemat 1

Niech $f : X \to R^1$ **ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe oraz niech** $X \subset R^n$ **będzie zbiorem wypukłym . Funkcja f(x) jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej hesjan A(x) jest dodatnio pól-określony dla każdego** $x \in X$ **.**

Definicja macierzy A dodatnio półokreślonej

Macierz A o wymiarze nxn jest dodatnio pól-określona, jeśli

dla każdego niezerowego $x \in R^n$

$$\langle x, Ax \rangle \geq 0$$

Definicja macierzy A dodatnio określonej

Macierz A o wymiarze nxn jest dodatnio określona, jeśli

dla każdego niezerowego $x \in R^n$

$$\langle x, Ax \rangle > 0$$

Kryterium Sylwestra – praktyczne sprawdzenie wypukłości funkcji f(x)

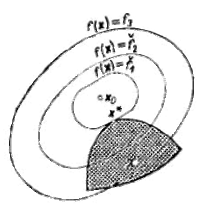
- **Kwadratowa macierz symetryczna A jest dodatnio pól-określona wtedy i tylko wtedy, gdy:**

$$a_{11} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad ,\dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \dots, a_{2n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

- **Kwadratowa macierz symetryczna A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy:**

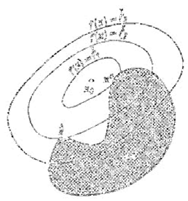
$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad ,\dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \dots, a_{2n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Rys.1 Zbiór X - wypukły



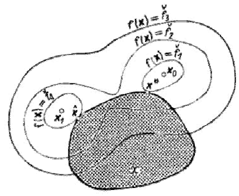
Funkcja f(x) też jest wypukła

Rys.2 Zbiór X – nie jest wypukły



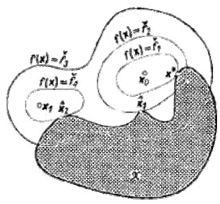
Funkcja f(x) – funkcja wypukła.

Rys.3 Zbiór X – jest wypukły



Funkcja f(x) nie jest wypukła,

Rys.4 Zbiór X – nie jest wypukły



Funkcja f(x) też nie jest wypukła.

Funkcje wypukłe

Lemat 2

Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją różniczkowalną oraz zbiór $X \subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym.
Funkcja f(x) jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x, x^0 \in X$

$$f(x) \ge f(x^0) + < \nabla f(x^0),\ x - x^0 >$$

Funkcja f(x) jest **wypukła** w przedziale (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji leży ponad wykresem stycznej dla każdego punktu x^0 z przedziału (a,b).

Lemat 3

Niech funkcja $f : X \to R^1$, dla $X \subset R^n$ będzie funkcja wypukłą, wówczas dla dowolnego rzeczywistego α zbiór

$$X_\alpha = \{x : f(x) \le \alpha\}$$

jest wypukły.

Lemat 4

Niech $X \subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym. Jeśli funkcje $f_i : X \to R^1$ dla i=1,...,k są funkcjami wypuklymi oraz jeśli wielkości skalarne są większe od zera dla i=1,...,k $\alpha_i \ge 0$ to funkcja f(x)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$$

jest funkcją wypukłą.

Twierdzenie 2

Dowolne minimum lokalne funkcji wypukłej f(x) na wypukłym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych $X \subset R^n$ jest na tym zbiorze jej minimum globalnym.

Dowód:

Niech w punkcie $x^1 \in X$ funkcja f(x) ma swoje minimum lokalne. Oznacza to, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że:

$$f(x^1) = \min_{x \in V} f(x)$$

gdzie: $V = \{x \in X, \|x - x^1\| \le \varepsilon\}$

Przyjmijmy $x^2 \in X$, $x^1 \ne x^2$ **. Wybierzmy** $0 < \lambda < 1$ **oraz**

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in V$$

Ze względu na wypukłość f(x) :

$$\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \ge f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)$$

$$f\left(x^2\right) \geq \frac{f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) - \lambda f\left(x^1\right)}{1-\lambda} \geq \frac{f\left(x^1\right) - \lambda f\left(x^1\right)}{1-\lambda} = f\left(x^1\right)$$

ckd

Wniosek

Ściśle wypukła funkcja f(x) określona na wypukłym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych X ma na tym zbiorze co najwyżej jedno minimum.

Przykład

Niech $c \in R^n$ **,** $d \in R^1$ **. Wykazać, że funkcja** $f: R^n \to R^1$ **określona formułą liniową:**

$$f(x) = c^T x + d$$

jest jednocześnie wypukła i wklęsła na R^n**.**