Modelowanie matematyczne jako podstawa obliczeń naukowo-technicznych:

- Wybór modelu opisowego, a w konsekwencji struktury matematycznej modelu jest w znacznym stopniu arbitralny,
- Struktura matematyczna użyta do modelowania powinna by skończenie wymiarowa – tzn.: wyczerpująco opisana za pomocą skończonej liczby parametrów,
- Kryteria oceny modelu są ściśle związane z jego przeznaczeniem.

Wniosek:

Model uznany za adekwatny w jednym zastosowaniu może się okazać nieadekwatny w innym.

Zadanie programowania liniowego PL

$$\max \; f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

dim **x**=n, dim **c**=n

Macierze $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ odpowiadają za współczynniki w m_1 i m_2 ograniczeniach

dim $\mathbf{A_1}$ =[m_1 x n], dim $\mathbf{A_2}$ =[m_2 x n]

Wektory b_1, b_2 odpowiadają za prawe strony ograniczeń

dim $\mathbf{b_1}$=m_1, dim $\mathbf{b_2}$=m_2

Zadanie programowania liniowego - przykłady

$$\max_{x \in X} \; x_0 = 2\mathbf{x}_1 + 1x_2 \qquad X = \left\{ x : \begin{array}{c} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \end{array}, x \ge 0 \right\}$$

Przykład I System produkcji – maksymalizacja zysku

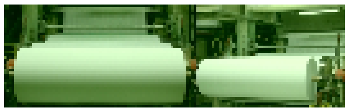
Przykład II System cięcia surowca

$$\min_{x \in X} x_0 = 0.3x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3$$

przy ograniczeniach:

$$X = \left\{ x : \begin{array}{c} 7x_1 + 3x_2 + 0x_3 \ge 2100 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 \ge 1200 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0, x \in Z^3 \end{array} \right.$$

Przykład III
Maksymalizacja zysków w procesie produkcji w fabryce papieru.



Cel: Optymalny poziom produkcji papieru niskiej i wysokiej jakości przy uwzględnieniu ograniczeń.

Zakład przemysłowy produkuje papier niskiej i wysokiej jakości. Do produkcji wykorzystywane są następujące składniki:

- pulpa drzewna
- chemikalia
- szmaty lniane
- woda

Ceny surowców kształtują się następująco:

Surowiec	Cena jednost. [zł/jedn.]
Pulpa	3
Chemikalia	4
Szmaty lniane	9

Woda jest wolna od opłat.

Jej zużycie jest nielimitowane.

W zależności od tego, czy produkowany jest papier niskiej, czy wysokiej jakości zużywana jest różna ilość surowców.

Surowiec/jednostkę	Jakość papieru	
	Niska	Wysoka
Pulpa	1,10	1,50
Chemikalia	0,10	0,20
Szmaty	0,10	0,40

Koszt wyprodukowania jednostki papieru:

- niskiej jakości wynosi - 1,8 [zł],
- wysokiej jakości - 1,5 [zł].

Cena sprzedaży jednostki produktu końcowego wynosi :

- 10,0 [zł] dla produktu niskiej jakości
- 16,5 [zł] dla produktu wysokiej jakości.

Efektem ubocznym przy produkcji papieru są ścieki. Podczas wytwarzania jednostki papieru niskiej jakości powstają 3 jednostki ścieków, zaś w przypadku papieru o wysokiej jakości powstaje 6 jednostek ścieków.

Część ścieków poddawana jest procesowi oczyszczania w wyniku czego ilość zanieczyszczenia jest redukowana o 50%. Pozostała część ścieków jest odprowadzana do kanałów. Koszt tych operacji przedstawia się następująco:

- Oczyszczanie ścieków powstałych przy produkcji papieru niskiej jakości = 0,11 [zł] na jednostkę produkcyjną,
- oczyszczanie ścieków powstałych przy produkcji papieru wysokiej jakości =0,12 [zł] na jednostkę produkcyjną,
- Koszt odprowadzenia jednostki ścieków do kanałów = 0,3 [zł].

Proces produkcyjny obarczony jest z góry nałożonymi ograniczeniami:

- Zakład może zakupić maksymalnie 50 jednostek pulpy drzewnej
- Maksymalna przepustowość oczyszczalni ścieków wynosi 60 jednostek
- Ze względu na kooperację zakład musi wytworzyć przynajmniej 12 jednostek papieru niskiej jakości

Cel: znalezienie optymalnego poziomu produkcji papieru niskiej i wysokiej jakości, takiego aby zysk przedsiębiorstwa był maksymalny.

Uwzględnić należy wszystkie koszty generowane przez proces produkcyjny oraz ograniczenia tegoż procesu.

W celu znalezienia maksymalnego dochodu , należy zmaksymalizować funkcję celu przedstawiającą dochód zakładu produkcji papieru.

Definicja problemu programowania liniowego PL

- Wektor zmiennych decyzyjnych: $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

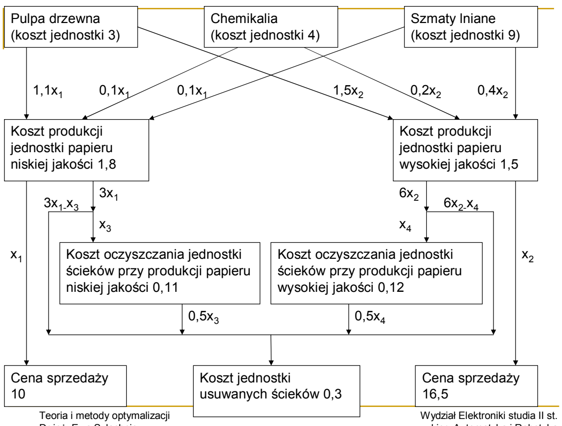
gdzie:

x_1 - wielkość produkcji papieru niskiej jakości

x_2 -wielkość produkcji papieru wysokiej jakości

x_3 -ilość oczyszczanych ścieków przy produkcji papieru niskiej jakości

x_4 - ilość oczyszczanych ścieków przy produkcji papieru wysokiej jakości.



Wyznaczenie funkcji celu i ograniczeń zadania produkcji papieru

$10x_1 + 16{,}5x_2$ dochód

$1{,}8x_1 + 1{,}5x_2$ koszty produkcji

$3 \cdot 1{,}1x_1 + 4 \cdot 0{,}1x_1 + 9 \cdot 0{,}1x_1$ koszty materiałów do produkcji papieru niskiej jakości

$3 \cdot 1{,}5x_2 + 4 \cdot 0{,}2x_2 + 9 \cdot 0{,}4x_2$ koszty materiałów do produkcji papieru wysokiej jakości

$0{,}11x_3 + 0{,}12x_4$ koszty oczyszczania ścieków

$0{,}3\left[(3x_1 - x_3) + 0{,}5x_3 + (6x_2 - x_4) + 0{,}5x_4\right]$ koszt odprowadzenia ścieków

W celu znalezienia maksymalnego zysku, należy maksymalizować funkcję celu w postaci: dochód – koszty.

$$\begin{aligned}\max_X F(X) &= 10x_1 + 16{,}5x_2 - (1{,}8x_1 + 1{,}5x_2) - (3 \cdot 1{,}1x_1 + 4 \cdot 0{,}1x_1 + 9 \cdot 0{,}1x) + \\ &- (3 \cdot 1{,}5x_2 + 4 \cdot 0{,}2x_2 + 9 \cdot 0{,}4x) - (0{,}11x_3 + 0{,}12x_4) + \\ &- (0{,}3[(3x_1 - x_3) + 0{,}5x_3 + (6x_2 - x_4) + 0{,}5x_4]) = \\ &= 2{,}7x_1 + 4{,}4x_2 + 0{,}04x_3 + 0{,}03x_4\end{aligned}$$

Zatem funkcja celu jest postaci:

$$\max_{x \in X} F(x) = 2{,}7x_1 + 4{,}4x_2 + 0{,}04x_3 + 0{,}03x_4$$

Uwzględniając następujące ograniczenia X:

- maksymalna ilość pulpy $1{,}1x_1 + 1{,}5x_2 \le 50$
- maksymalna przepustowość oczyszczalni ścieków $x_3 + x_4 \le 60$
- wymaganie nieujemnego przepływu $3x_1 - x_3 \le 0$
- wymaganie nieujemnego przepływu $6x_2 - x_4 \le 0$
- wymaganie wyprodukowania określonej liczby papieru niskiej jakości $x_1 \ge 12$
- Wymaganie produkowania określonej liczby papieru wysokiej jakości: $x_2 \ge 0$

Zadanie maksymalizacji zysku produkcji papieru

$$\max_{x \in X} \; x_0 = 2.7\mathbf{x}_1 + 1.5x_2 + 0.04\mathbf{x}_3 + 0.03x_4$$

$$\left\{\begin{array}{c} 1.1x_1 + 1.5x_2 \le 50 \\ x_1 + x_2 \le 60 \\ 3x_1 - x_3 \ge 0, \quad x \ge 0 \\ 6x_2 - x_4 \ge 0 \\ x_1 \ge 12 \end{array}\right\}$$

Zadanie programowania nieliniowego PN

$$\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = f\left(\hat{\mathbf{x}}\right)$$

przy ograniczeniach:

$$X = \left\{x \mid g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i=1,\dots,m\right\}$$

Zadanie programowania nieliniowego polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych $\hat{x}$, należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych **X** w postaci:

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in X$

$$f\left(\hat{\mathbf{x}}\right) \le f(\mathbf{x})$$

Przykład zadania programowania nieliniowego
Przykład IV. Zadania sterowania siecią dystrybucji wody minimalizujące zużycie energii elektrycznej

Dana jest sieć dystrybucji wody w postaci:

- **m- węzłów,**
- **s - odbiorców z odpowiednimi potrzebami, w których utrzymywane jest odpowiednie ciśnienie oraz n łuków,** $\sigma \in R^s$
- **każdy łuk „i" charakteryzuje się przepływem y_i:** $y \in R^n$

Opis sieci:

- **spadek ciśnienia x_i na łuku „i":** $x \in R^n$ $\quad x_i = r_i y_i^2 \operatorname{sgn} y_i + d_i$

  gdzie: r_i- opór hydrauliczny łuku „i"

  d_i- różnica wysokości geodezyjnych łuku „i"

Ograniczenia wynikające ze struktury sieci: $A\,y = \sigma$

I prawo Kirchhoff'a:

A – macierz incydencji dla węzłów sieci wodociągowej,

II prawo Kirchhoff'a:

$$B\,x = 0$$

B – macierz oczkowa dla węzłów sieci wodociągowej.

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Sterowanie siecią dystrybucji wody minimalizujące zużycie energii elektrycznej

$$\min \quad f(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i)$$

gdzie: $f_i(y_i) = x_i\, y_i = r_i y_i^3 \operatorname{sgn} y_i + d_i y_i$

przy ograniczeniach:

$$A\,y = \sigma$$

$$B\,x = 0$$

$$x_i = r_i y_i^2 \operatorname{sgn} y_i + d_i$$

$$y \in R^n \quad x \in R^n \quad \sigma \in R^s$$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Przykład V: Znaleźć najlepszą liniową aproksymację nieznanej funkcji określonej poprzez tabelę 20 pomiarów.

Wyznaczyć optymalne wartości wektora współczynników *b=[b_1, b_2, b_3, b_4]* formy liniowej :

$$y = b^T u$$

gdzie: u - wektor wielkości sterujących, y - wektor wielkości wyjściowych

Dane: tabela z 20 pomiarami wektora u wielkości sterujących oraz wektora wielkości wyjściowych $\tilde{y}_i \;\; i=1,\dots,20$

dla następujących kryteriów jakości:

1. **minimum sumy wartości bezwzględnych różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:**

$$\min\, [\, f(b) = \sum_{i=1}^{20} \left|\tilde{y}_i - y_i(b)\right|$$

gdzie: $y_i(b)$ **- wartości zmierzone wielkości wyjściowych**

i=1,...,20 - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu

$$y_i(b) = b_1 u_{1i} + b_2 u_{2i} + b_3 u_{3i} + b_4 u_{4i}$$

Zadanie trudne do rozwiązania, ponieważ funkcja celu nie jest różniczkowalna.

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Równoważne zadanie programowania liniowego

- **Wprowadzono nową zmienną:** $z_i = \left|\tilde{y}_i - y_i(b)\right|$

- **Zwiększenie wymiaru zadania: 24 zmienne niezależne**

$$\min\; f(b) = \sum_{i=1}^{20} z_i$$

przy ograniczeniach:

$$-z_i \le \tilde{y}_i - b_1 u_{1i} - b_2 u_{2i} - b_3 u_{3i} - b_4 u_{4i} \le z_i$$

dla i=1,...,20

Zadanie programowania liniowego:

- **funkcja celu jest wypukła**
- **rozwiązano metodą dwufazową simpleks.**

Wektor b optymalnych współczynników :

$b_1 = 51{,}87 \quad b_2 = 1{,}232 \quad b_3 = -0{,}122 \quad b_4 = -1{,}08$

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Drugie kryterium jakości

2. minimum sumy kwadratów różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:

$$\min\, [\, f(b) = \sum_{i=1}^{20} \left(\tilde{y}_i - y_i(b)\right)^2$$

gdzie: $\tilde{y}_i \;\; i=1,\dots,20$ **- wartości zmierzone wielkości wyjściowych**

$y_i(b)$ **- i=1,...,20 - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu**

$$y_i(b) = b_1 u_{1i} + b_2 u_{2i} + b_3 u_{3i} + b_4 u_{4i}$$

Zadanie programowania nieliniowego:

- **funkcja celu jest wypukła**
- **rozwiązano metodą gradientów sprzężonych w wersji Polak'a-Ribiere'y.**

$b_1 = 39{,}28 \quad b_2 = 1{,}07 \quad b_3 = 0{,}16 \quad b_4 = -0{,}94$

Wyniki identyfikacji zależą od wyboru kryterium optymalizacji i przyjętej dokładności obliczeń.

Teoria i metody optymalizacji
Dr inż. Ewa Szlachcic
Wydział Elektroniki studia II st.
kier. Automatyka i Robotyka

Zadanie programowania ilorazowego:

$$extr\ f(x) = \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0}$$

$$f : X \to R^1$$

przy ograniczeniach:

$$c \geq 0, d > 0, x > 0$$

$$c \in R^n \quad d \in R^n \quad x \in R^n$$

oraz

$$A x \leq b$$

dim A=[mxn] $b \in R^m$

Warunki istnienia rozwiązania:
•zbiór rozwiązań dopuszczalnych problemu jest ograniczony
•mianownik funkcji celu jest dodatni dla wszystkich rozwiązań dopuszczalnych.

Przykład III

Optymalizacja planu produkcji przedsiębiorstwa, w którym ilość zanieczyszczeń przypadająca na jednostkę zysku będzie najmniejsza.

Surowiec	Zużycie surowca [kg/jedn. Wyrobu]		Zapas surowca
	W1	W2	
S! S2	1 4	1 2	4 8
Zysk jedn. [zł/jedn. wyrobu]	200	100	
Emisja zanieczyszczeń [kg/jedn. Wyrobu]	3	4	

Całkowita emisja zanieczyszczeń: $3x_1 + 4x_2$

Zysk z produkcji wyrobów W1 i W2: $200x_1 + 100x_2$

$$\min_{x \in X_D} z = \frac{3x_1 + 4x_2}{200x_1 + 100x_2}$$

przy ograniczeniach na surowce S1 i S2:

$$X_D = \left\{ x \middle| \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Przykład VI- Symulacja ruchu ramienia robota przemysłowego

- Adekwatny model matematyczny dla szerokiej klasy obiektów sterowania- to układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

W tym celu:

1. Konkretne ustalenie liczby równań
2. Oznaczenie wartości parametrów tych równań
3. Ustalenie warunków początkowych
4. Jeżeli to możliwe - uproszczenie modelu do postaci równań liniowych
5. Poszukiwanie rozwiązania, minimalizującego błędy, wynikające z opisu w postaci modelu matematycznego – układu równań różniczkowych .

Proces symulacji:

Numeryczne rozwiązanie równań różniczkowych poprzez:

- Zastąpienie pochodnych – ilorazami różnicowymi
- Rozwiązanie wynikającego z tego faktu układu równań liniowych.
- Minimalizacja błędu dla układu równań różniczkowych.

Przykład VII- Zadanie lokalizacji magazynu i ustalania tras dostaw optymalizacji sieci tras dostaw z wyborem najlepszego położenia dla magazynu

Przykład VIII –
Zadania klasy VRP
np..: Firma CorbitConnect - obsługa rynku dostaw
np.: - procedury logistyczne:

- Route scheduling, optimisation and disposition
- Fleet management and controlling
- Fleet controlling
- Mobile navigation with tour management
- Mobile tour management

np.: Program PLANTOUR – system optymalnego planowania transportu
Program CARMANAGER – system zarządzania parkingiem
Program TRACTMANAGER – inteligentne sterowanie flotą

Rozwiązywanie problemów technicznych – to umiejętność sprowadzania tych zadań do standardowych problemów numerycznych, takich jak:

- Rozwiązywanie układu liniowych równań algebraicznych,
- Rozwiązywanie układu nieliniowych równań algebraicznych,
- Aproksymacja i interpolacja funkcji jednej i wielu zmiennych,
- Różniczkowanie funkcji jednej i wielu zmiennych,
- Całkowanie układów równań różniczkowych zwyczajnych,
- Rozwiązywanie zadań optymalizacji liniowej,
- Rozwiązywanie zadań optymalizacji nieliniowej.

Zadanie numeryczne – to proces przetwarzania pewnego elementu zbioru danych *D* w taki element zbioru wyników *W*, który spełnia zadane wymagania R_1, R_2,….

Układ $\{D, W, R_1, R_2, ...\}$ To klasa zadań numerycznych.