TEORIA I METODY OPTYMALIZACJI

Wydział Elektroniki
Kier. Automatyka i Robotyka
Studia magisterskie

dr inż. Ewa Szlachcic
Katedra Automatyki, Mechatroniki i Systemów Sterowania
Politechnika Wrocławska
pok. 219 C-3
ewa.szlachcic.staff.iiar.pwr.wroc.pl

Program wykładu

- Wprowadzenie do zagadnień optymalizacji
- Definicja zadania optymalizacji i jego klasyfikacja
- Programowanie liniowe PL
  - Metody programowania liniowego PL
  - Metody programowania liniowego dla zmiennych całkowitoliczbowych PCL
- Programowanie nieliniowe PN:
  - Metody optymalizacji bez ograniczeń
  - Metody optymalizacji z ograniczeniami
- Metod optymalizacji lokalnej
- Metody optymalizacji globalnej
- Zadania optymalizacji wielokryterialnej

Literatura

- Stadnicki J., Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji z przykładami zastosowań technicznych, WNT, Warszawa, 2006.
- Kusiak J., Danielewska-Tułecka A., Oprocha P., Optymalizacja Wybrane metody z przykładami zastosowań, PWN, Warszawa, 2009.
- Cegielski A. Programowanie matematyczne, Wyd. Uniw. Ziel. 2004
- Stachurski A., Wierzbicki A.P., Podstawy optymalizacji, PWN Warszawa 1999
- Findeisen S., Szymanowski W., Wierzbicki A., Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, 1987
- Garfinkel R.S., Nemhauser G.L., Programowanie całkowitoliczbowe, PWN Warszawa 1978
- Michalewicz Z., Algorytmy genetyczne+struktury danych= programy ewolucyjne, WNT Warszawa, 1999
- Arabas J., Wykłady z algorytmów ewolucyjnych, WNT Warszawa, 2001
- Wierzchoń S.T., Sztuczne systemy immunologiczne, Teoria i zastosowania, EXIT Warszawa, 2002.

- **Programowanie liniowe**. Podstawy teoretyczne PL. Warunki konieczne i dostateczne optymalizacji liniowej. Metody simpleks, dwufazowy simpleks, dualny simpleks. Programowanie liniowe ze zmiennymi rzeczywistymi, programowanie liniowe ze zmiennymi dyskretnymi.

  w tym:

  Programowanie całkowitoliczbowe liniowe

  Metody odcięć. Metody podziału i ograniczeń. Klasyczne zadania optymalizacji dyskretnej (problem plecakowy, przydziału, komiwojażera, problemy szeregowania zadań.), przepływy w sieciach i zadania transportowe.

  Programowanie dyskretne (binarne)
- **Programowanie nieliniowe**. Podstawy teoretyczne PN. Warunki konieczne i wystarczające optymalności. Metody dokładne i heurystyczne (m.in. genetyczne i ewolucyjne) poszukiwania ekstremum bez ograniczeń i z ograniczeniami.

Sformułowanie zadania optymalizacji

Wektor zmiennych decyzyjnych **x**: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

gdzie: n – ilość zmiennych decyzyjnych.

Funkcja celu (funkcja kryterialna) f(x) : $f(\mathbf{x}) : R^n \longrightarrow R^1$

oraz m funkcji ograniczeń g_i(x):

$$g_i(\mathbf{x}) : R^n \longrightarrow R^1 \quad dla \quad i = 1, \ldots, m$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych x, należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych **X** w postaci:

$$X = \{ x \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \}$$

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in X$

$$f\left(\hat{\mathbf{x}}\right) \leq f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi: $\min\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f\left(\hat{\mathbf{x}}\right)$

Kategorie klasyfikacji zadań optymalizacji

- Model procesu:
  - Statyczny
  - Dynamiczny
  - Model procesu bez ograniczeń
  - Model procesu z ograniczeniami
- Przestrzeń rozwiązań zmiennych decyzyjnych
  - Zmienne rzeczywiste
  - Zmienne całkowitoliczbowe
    - Zmienne binarne
- Postać funkcji celu:
  - Funkcja skalarna
  - Funkcja wektorowa
- Dane o procesie niezbędne w algorytmie optymalizacji
  - Wartości funkcji celu
  - Gradient funkcji – algorytm pierwszego rzędu
  - Hesjan funkcji - algorytm drugiego rzędu

Rodzaje zadań optymalizacji ze względu na wartości zmiennych decyzyjnych

- Zadania ze zmiennymi ciągłymi – przestrzeń poszukiwań jest iloczynem kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych, n – wymiar przestrzeni zmiennych niezależnych $X = R^n$
  - Wypukłe – funkcja celu i zbiór rozwiązań dopuszczalnych są wypukłe
  - Niewypukłe - funkcja celu i zbiór rozwiązań dopuszczalnych mogą być nie wypukłe
- Zadania ze zmiennymi dyskretnymi – wartości zmiennych niezależnych należą do zbioru dyskretnego (zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb binarnych) $X = Z^n$
- Zadania ze zmiennymi mieszanymi - wartości zmiennych niezależnych należą zarówno do zbioru liczb rzeczywistych jak i do zbioru liczb w postaci dyskretnej.

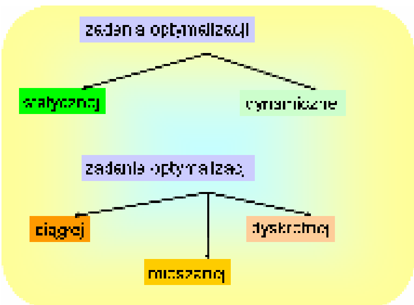
Przykłady praktycznych zastosowań:

- **Optymalne projektowanie procesów technologicznych**
- **Identyfikacja procesów technologicznych**
- **Optymalne zarządzanie przedsiębiorstwem - minimalizacja kosztów, maksymalizacja zysków w przedsiębiorstwie**
- **Poli-optymalne zadanie dla modelu gospodarki narodowej (np.: maksymalizacja konsumpcji i środków trwałych oraz minimalizacja poziomu zadłużenia zagranicznego gospodarki)**
- **Sterowanie procesem technologicznym**

Przykłady praktycznych zastosowań cd.:

- **Projektowanie efektywnej struktury systemu (np. sieci komputerowej)**
- **Projektowanie optymalnego przepływu w sieciach (sieci dystrybucji wody, sieci dystrybucji gazu, sieci komputerowej)**
- **Zadania optymalnego przydziału, zadania dystrybucji produktów**
- **Zadania optymalnego rozmieszczenia (minimalizacja strat czy odpadów- optymalny rozkrój , optymalne cięcie, optymalny kształt)**

Podział zadań optymalizacji



Zadanie programowania liniowego PL

$$\max \; f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

dim **x**=n, dim **c**=n

Macierze $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ odpowiadają za współczynniki w m_1 i m_2 ograniczeniach

dim $\mathbf{A}_1$ =[m_1 x n], dim $\mathbf{A}_2$ =[m_2 x n]

Wektory b_1, b_2 odpowiadają za prawe strony ograniczeń

dim $\mathbf{b}_1$=m_1, dim $\mathbf{b}_2$=m_2

Zadanie programowania kwadratowego

$$\max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = 0.5\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

gdzie:: $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{D}^T\mathbf{x} \le \mathbf{e},\ \ \mathbf{x} \ge 0\}$

Przykład zadania programowania nieliniowego

$$\min f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

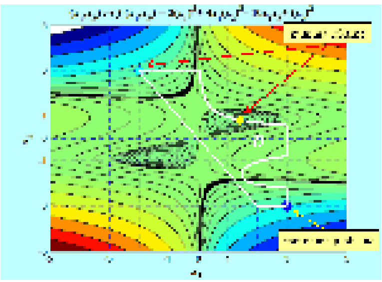
przy ograniczeniach:

$$x_1^2 \le x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 2$$

Przykład nieliniowego zadania optymalizacji z ograniczeniami

$$\min_{x\in X} f(x) = 2(x_1)^2 + 4x_1(x_2)^3 - 10x_2x_1 + (x_2)^2$$

$$X = \{(x_1,x_2) \mid x_1(x_2)^2(2.4 + x_2) \le 3$$
$$\wedge\ 3/2x_1 + x_2 \ge 0$$
$$\wedge\ (-3 \le x_i \le 3, i = 1,2)\}.$$



Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

Polega na znalezieniu optymalnego rozwiązania, które jest akceptowalne z punktu widzenia każdego kryterium

- Z problemem optymalizacji wielokryterialnej mamy do czynienia wówczas, gdy mamy do czynienia jednocześnie z wieloma funkcjami celu.
- Możliwe rozwiązania zadania optymalizacji można podzielić na dwie grupy:
  - rozwiązania zdominowane
  - rozwiązania nie-zdominowane (optymalne w sensie Pareto).

Zadanie optymalizacji wielokryterialnej

$$\min_{x\in X} F(x) = [f_1(x), \ldots, f_k(x)]$$

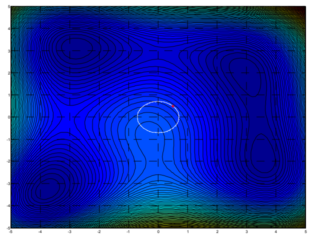
gdzie: k – liczba funkcji celu $f_i(x)$, $i=1,\ldots,k$

przy ograniczeniach $g_i(x) \le 0$, $i \in \{1,\ldots,m\}$

$h_j(x) = 0$, $j \in \{1,\ldots,p\}$

Tzn.:

$$X = \{(x) \mid g_i(x) \le 0 \quad dla\ i \in \{1,\ldots,m\}$$
$$h_j(x) = 0 \quad dla\ j \in \{1,\ldots,p\}\}.$$



Zadanie programowania ilorazowego:

$$extr\ f(x)=\frac{c^T x+c_0}{d^T x+d_0}$$

$$f: X \to R^1$$

przy ograniczeniach: $c \geq 0, d > 0, x > 0$

$$c \in R^n \quad d \in R^n \quad x \in R^n$$

oraz

$$Ax \leq b$$

dim A=[mxn] $\quad b \in R^m$

Warunki istnienia rozwiązania:

•zbiór rozwiązań dopuszczalnych problemu jest ograniczony

•mianownik funkcji celu jest dodatni dla wszystkich rozwiązań dopuszczalnych.

Przykład III

Optymalizacja planu produkcji przedsiębiorstwa, w którym ilość zanieczyszczeń przypadająca na jednostkę zysku będzie najmniejsza.

Surowiec	Zużycie surowca [kg/jedn. Wyrobu]		Zapas surowca
	W1	W2	
S! S2	1 4	1 2	4 8
Zysk jedn. [zł/jedn. wyrobu]	200	100	
Emisja zanieczyszczeń [kg/jedn. Wyrobu]	3	4	

Całkowita emisja zanieczyszczeń: $3x_1 + 4x_2$

Zysk z produkcji wyrobów W1 i W2: $200x_1 + 100x_2$

$$\min_{x \in X_D} z = \frac{3x_1 + 4x_2}{200x_1 + 100x_2}$$

przy ograniczeniach na surowce S1 i S2:

$$X_D = \left\{ x \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$